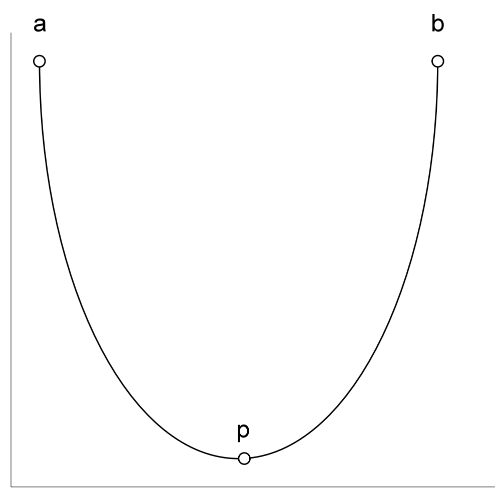
บทที่ 3
การหาค่าเหมาะสมที่สุดของฟังก์ชันตัวแปรเดียว
(Single Variable Optimization)

บทนี้นำเสนอเทคนิคที่นิยมใช้ในการทำ single variable optimization ซึ่งจะอธิบายทั้งหมด 2 วิธีด้วยกัน คือ search method และ approximation method รวมถึงวิธีการทำ single variable optimization ที่รวมทั้ง 2 วิธีเข้าด้วยกัน หรือที่เรียกว่า combination method แม้ว่าวิธี search method จะสามารถใช้ได้กับฟังก์ชันทุกประเภท แต่ฟังก์ชันที่ให้ประสิทธิภาพที่ดีที่สุดในการใช้ search method คือ ฟังก์ชันฐานนิยมเดียว (unimodal function) ซึ่งจะกล่าวไว้ในหัวข้อถัดไป ในส่วนของ approximation method นั้น สามารถใช้ได้กับฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้อย่างต่อเนื่อง (continuously differentiable function) ซึ่งถ้าเรานำวิธี approximation method ไปใช้กับฟังก์ชันอื่น คำตอบที่ได้ก็จะมีความคลาดเคลื่อนอันเนื่องมาจากการประมาณ

3.1 **ฟังก์ชันฐานนิยมเดียว** (Unimodal Function)

กำหนดฟังก์ชัน $f(x)$ ให้มีขอบเขตอยู่บน boundary L หรืออยู่ในช่วงระหว่าง a ถึง b และกำหนดให้ p เป็นจุดบนขอบเขตของ L แล้ว จะเรียกฟังก์ชันนี้ว่า unimodal function ก็ต่อเมื่อ มีจุด p เพียงจุดเดียวในฟังก์ชัน ที่ทำให้ค่าของฟังก์ชันมีการลดค่าลงในขอบเขต [a,p] และค่าของฟังก์ชันมีการเพิ่มค่าขึ้นในขอบเขต [p,b] ดังรูป



รูปที่ 3.1: Unimodal function

3.2 **การหาค่าเหมะสมที่สุดด้วยวิธี** Search Method

Search method เป็นวิธีพื้นฐานที่ใช้ในการหาคำตอบที่เหมาะสมที่สุดของ objective function โดยในบทนี้จะนำเสนอวิธีการทำ search method สำหรับ single variable ทั้งหมด 2 วิธีด้วยกัน คือ Gloden section search method และ Fibonacci search method โดยทั้งสองวิธีนี้จะมีวิธีการพิจารณาที่คล้ายกัน คือ เราจะเริ่มพิจารณาข้อมูลทั้งหมดที่อยู่ในช่วงความไม่แน่นอนเริ่มต้น (Initial interval of uncertainty) จากนั้นจะแบ่งข้อมูลเป็น 2 ช่วง แล้วทำการเปรียบเทียบค่าของข้อมูลในแต่ช่วง ซึ่งเราจะตัดข้อมูลในช่วงที่เราไม่สนใจทิ้งออกไป แล้วทำซ้ำเดิมคือ แบ่งช่วงของข้อมูลที่เราสนใจออกเป็น 2 ช่วงใหม่ และทำการเปรียบเทียบ จนกว่าจะเหลือช่วงความไม่แน่นอนที่เราพอยอมรับได้ เราจะกล่าวได้ว่าในช่วงความไม่แน่นอนที่เกิดขึ้นสุดท้ายนั้น จะมีจุด optimal เกิดขึ้น ซึ่งถ้าฟังก์ชันของข้อมูลที่เราสนใจไม่ได้เป็นฟังก์ชันฐานนิยมเดียวแล้ว จุดที่เกิดขึ้นจะเป็นจุดที่ทำให้เกิด Lobal optimal แต่ในทางตรงกันข้าม ถ้าข้อมูลที่เราสนใจเป็นฟังก์ชันฐานนิยมเดียวแล้ว จุดที่เกิดขึ้นจะเป็นจุดที่ทำให้เกิด Global optimal

3.2.1 Golden Section Search Method

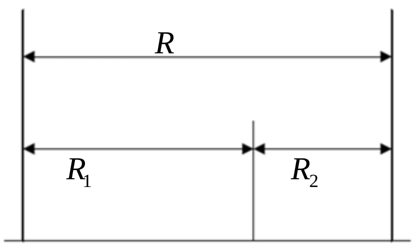
Golden section search method เป็นเทคนิคที่ใช้ในการหาค่า minimum และค่า maximum ของ unimodal function วิธี golden section search ถูกคิดค้นขึ้นในปี 1953 โดย Kiefer กฎพื้นฐานของ golden section คือ อัตราส่วนระหว่างช่วงที่น้อยกว่า (smaller interval) เทียบกับช่วงที่มากกว่า (larger interval) เท่ากับ อัตราส่วนระหว่างช่วงที่มากกว่าเทียบกับช่วงทั้งหมด

$$R = R_1 + R_2 \tag{3.1}$$

โดยที่ R คือช่วงทั้งหมดของฟังก์ชัน

R_1 คือช่วงที่มีความยาวมากกว่าของฟังก์ชัน

R_2 คือช่วงที่มีความยาวน้อยกว่าของฟังก์ชัน



รูปที่ 3.2: กฎของ golden section

กฎพื้นฐานของ golden section กล่าวไว้ว่า

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{R_1}{R} \tag{3.2}$$

รวมสมการ (3.1) และ (3.2) จะได้

$$\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 + \frac{R_2}{R_1} = 1 \tag{3.3}$$

ให้ $K = \dfrac{R_2}{R_1}$ แทนในสมการ (3.3) จะได้

$$K^2 + K = 1 \tag{3.4}$$

จากสมการ (3.4) จะได้คำตอบของสมการที่เป็นบวก คือ $K = 0.6180$ เมื่อนำกฎของ golden section มาประยุกต์ใช้ในวิธี search method จะได้ช่วงของความไม่แน่นอนลดลง ด้วยค่าคงที่ $K = 0.6180$ และเมื่อนำมาใช้กับกฎการทำซ้ำจะได้ความสัมพันธ์ดังสมการ

$$I_n = I_0 (0.6180)^{n-1} \tag{3.5}$$

โดยที่ I_n คือ ช่วงของความไม่แน่นอนที่ได้จากการหาค่าครั้งที่ n

I_0 คือ ช่วงของความไม่แน่นอนเริ่มต้น

n คือ จำนวนที่ใช้ในการหาค่า

จากรูปที่ 3.3 จะเห็นได้ว่าช่วงของขอบเขตที่ใช้ในการหาคำตอบของฟังก์ชัน อยู่ระหว่าง lower boundary (b_l) และ upper boundary (b_u) ดังนั้น กำหนดให้ช่วงที่ใช้ในการหาคำตอบของฟังก์ชัน I เป็น

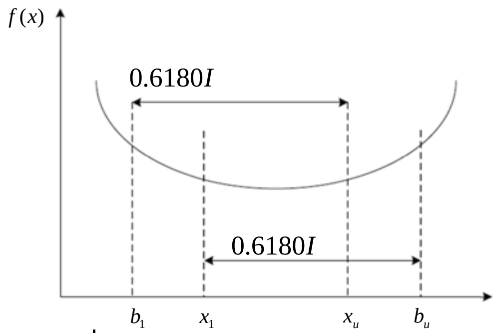
$$I = b_u - b_l \tag{3.6}$$

จากนั้นจะเป็นขั้นตอนในการหาจุด 2 จุด ที่อยู่ในช่วงของฟังก์ชันมาเปรียบเทียบกัน โดยวิธีการเลือกจุดนั้น เราจะใช้กฎพื้นฐานของ golden section กล่าวคือ จุดแรกนั้นจะเป็นจุดที่อยู่ในช่วงที่มีค่ามากกว่า หรือ x_u และ จุดที่ 2 เป็นจุดที่อยู่ในช่วงที่มีค่าต่ำกว่า หรือ x_l ซึ่งเราคำนวณหาค่าของจุดทั้ง 2 ได้ดังนี้

$$x_l = b_u - KI \tag{3.7}$$

$$x_u = b_l + KI \tag{3.8}$$

$$K = 0.6180$$



รูปที่ 3.3: Golden section search method

ขั้นตอนถัดมาจะเป็นการเปรียบเทียบจุดทั้ง 2 จุด โดยที่ถ้าโจทย์เราเป็น minimization problem เราจะพิจารณาช่วงที่ทำให้เกิดค่าของฟังก์ชันต่ำที่สุด และจากรูปจะเห็นได้ว่า $f(x_l) > f(x_u)$ นั่นคือ เราจะพิจารณาช่วงที่อยู่ทางด้านขวาของ x_l เนื่องจากในช่วงนี้จะมีค่าของฟังก์ชันต่ำ $f(x_u)$ เกิดขึ้น และจากนั้น เราจึงพิจารณาซ้ำเดิมอีกจนกว่าช่วงที่เกิดขึ้นจะ

อยู่ในช่วงที่เรารับได้ (tolerance) ขั้นตอนในการหาคำตอบของฟังก์ชัน โดยใช้ golden section search method สามารถเขียนสรุปได้ดังนี้

1. กำหนดฟังก์ชัน $f(x)$, tolerance (ε), และ boundary $b_{l,1}, b_{u,1}$
2. หาจุดเริ่มต้น 2 จุด ($x_{l,1}$ และ $x_{u,1}$) เพื่อใช้เปรียบเทียบค่าของฟังก์ชัน โดยใช้สมการที่ (3.7) และ (3.8) จะได้

$$x_{l,1} = b_{u,1} - KI \tag{3.9}$$

$$x_{u,1} = b_{l,1} + KI \tag{3.10}$$

3. เปรียบเทียบค่าของฟังก์ชัน ($f(x_{l,1})$ และ $f(x_{u,1})$) เพื่อหาช่วงที่เราสนใจ โดยในที่นี้ เราจะแยกออกเป็น 2 กรณีคือ

   <u>Minimum problem</u>

   ถ้า $f(x_{l,n}) \le f(x_{u,n})$ แล้ว

$$b_{l,n+1} = b_{l,n} \tag{3.11}$$

$$b_{u,n+1} = x_{u,n} \tag{3.12}$$

$$I_{n+1} = b_{u,n+1} - b_{l,n+1} \tag{3.13}$$

$$x_{l,n+1} = b_{u,n+1} - KI_{n+1} \tag{3.14}$$

$$x_{u,n+1} = x_{l,n} \tag{3.15}$$

   ถ้า $f(x_{l,n}) > f(x_{u,n})$ แล้ว

$$b_{l,n+1} = x_{l,n} \tag{3.16}$$

$$b_{u,n+1} = b_{u,n} \tag{3.17}$$

$$I_{n+1} = b_{u,n+1} - b_{l,n+1} \tag{3.18}$$

$$x_{l,n+1} = x_{u,n} \tag{3.19}$$

$$x_{u,n+1} = b_{l,n+1} + KI_{n+1} \tag{3.20}$$

   <u>Maximum problem</u>

   ถ้า $f(x_{l,n}) \le f(x_{u,n})$ แล้ว ให้ใช้เงื่อนไขของสมการที่ (3.16) - (3.20)
   ถ้า $f(x_{l,n}) > f(x_{u,n})$ แล้ว ให้ใช้เงื่อนไขของสมการที่ (3.11) - (3.15)

4. ตรวจสอบค่าของ tolerance (ε) ที่ยอมรับได้ ถ้า $\left|b_{u,n} - b_{l,n}\right| \le \varepsilon$ ให้ทำขั้นตอนต่อไป แต่ถ้าไม่อยู่ในค่าที่ยอมรับได้ให้กำหนด $n = n+1$ และเริ่มทำขั้นตอนในข้อที่ 3
5. จะได้คำตอบของฟังก์ชัน เป็น

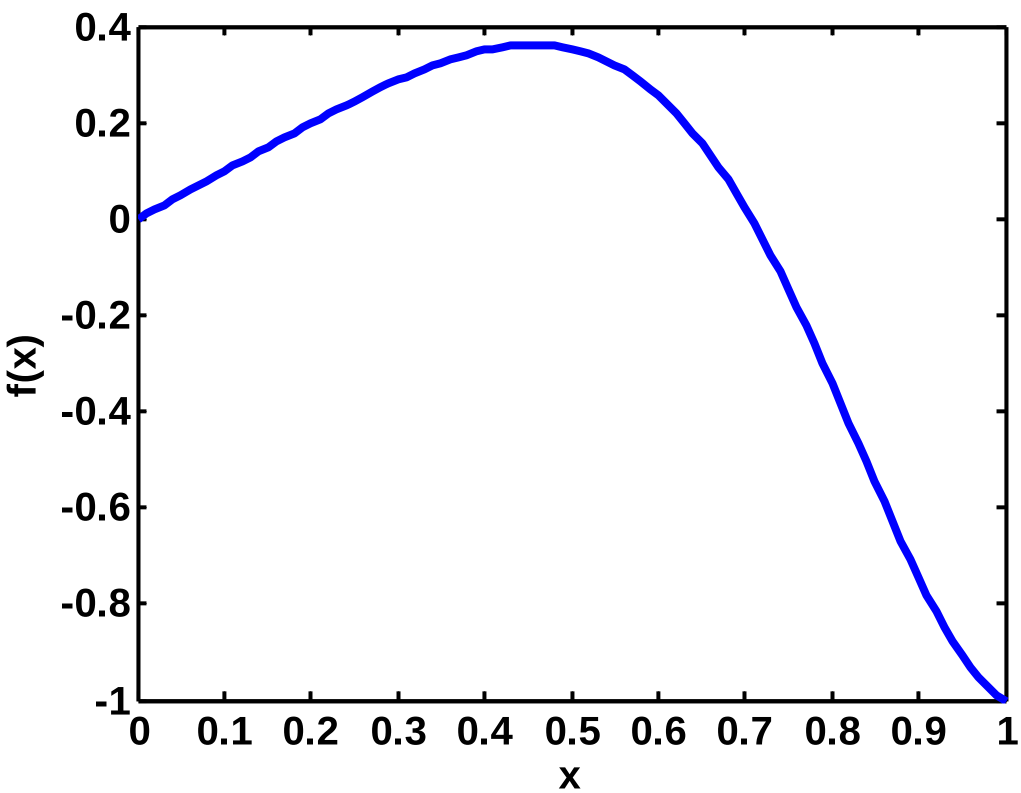
$$x^* = \min\{x_{l,n}, x_{u,n}\} \text{ หรือ } x^* = \max\{x_{l,n}, x_{u,n}\}$$

$$f_{\min} = \min\{f(x_{l,n}), f(x_{u,n})\} \text{ หรือ } f_{\max} = \max\{f(x_{l,n}), f(x_{u,n})\}$$

ตัวอย่างที่ 3.1 หาค่า maximum ของฟังก์ชัน $f(x) = x\cos(\pi x^2)$ ในช่วง [0.0 , 0.7] โดยให้ $\varepsilon = 1\times 10^{-4}$

Solution

เมื่อเราทำการ plot ด้วยมือ เราจะเห็นว่ากราฟให้คำตอบที่เป็น maximum ซึ่งมีค่า x ประมาณ 0.45 และให้ค่าของฟังก์ชันประมาณ 0.38 ซึ่งเราจะทำการหาคำตอบที่ถูกต้องด้วยวิธี Golden section search ดังต่อไปนี้



การคำนวณรอบที่ 1 ($n = 1$)

$$b_{l,1} = 0.0$$
$$b_{u,1} = 0.7$$
$$I_1 = 0.7$$

หาตำแหน่งเริ่มต้นที่ใช้ในการประมาณฟังก์ชั่น จากสมการที่ (3.9) และ (3.10) จะได้

$$x_{l,1} = 0.7 - (0.6180)(0.7) = 0.2674 \longrightarrow f(x_{l,1}) = f(0.2674) = 0.2607$$
$$x_{u,1} = 0.0 + (0.6180)(0.7) = 0.4326 \longrightarrow f(x_{u,1}) = f(0.4326) = 0.3600$$
$$f(x_{u,1}) > f(x_{l,1})$$

การคำนวณรอบที่ 2 ($n = 2$)

$$b_{l,2} = x_{l,1} = 0.2674$$
$$b_{u,2} = b_{u,1} = 0.7$$
$$I_2 = b_{u,2} - b_{l,2} = 0.7 - 0.2674 = 0.4326$$
$$x_{l,2} = x_{u,1} = 0.4326$$
$$x_{u,2} = b_{l,2} + KI_2 = 0.2674 + (0.6180)(0.4326) = 0.5347$$

ตรวจสอบค่า tolerance $|0.4326| > \varepsilon$ ดังนั้นทำซ้ำจนกว่าช่วงที่พิจารณาจะมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ tolerance

Iteration	bl	bu	xl	xu	f(xl)	f(xu)	I
1	0	0.7	0.2674	0.4326	0.260682	0.359963	0.7
2	0.2674	0.7	0.432653	0.534747	0.359973	0.333094	0.4326
3	0.2674	0.534747	0.369526	0.43262	0.336043	0.359967	0.267347
4	0.369526	0.534747	0.432641	0.471633	0.359971	0.361087	0.16522
5	0.432641	0.534747	0.471645	0.495742	0.361085	0.35518	0.102106
6	0.432641	0.495742	0.456745	0.471637	0.362113	0.361086	0.063102
7	0.432641	0.471637	0.447537	0.456741	0.361826	0.362113	0.038997
8	0.447537	0.471637	0.456744	0.462431	0.362113	0.361944	0.0241
9	0.447537	0.462431	0.453227	0.456742	0.362084	0.362113	0.014894
10	0.453227	0.462431	0.456743	0.458915	0.362113	0.362081	0.009204
11	0.453227	0.458915	0.4554	0.456742	0.362114	0.362113	0.005688
12	0.453227	0.456742	0.45457	0.455399	0.362107	0.362114	0.003515
13	0.45457	0.456742	0.4554	0.455912	0.362114	0.362115	0.002172
14	0.4554	0.456742	0.455912	0.456229	0.362115	0.362115	0.001343
15	0.4554	0.456229	0.455717	0.455912	0.362115	0.362115	0.00083
16	0.455717	0.456229	0.455912	0.456033	0.362115	0.362115	0.000513
17	0.455912	0.456229	0.456034	0.456108	0.362115	0.362115	0.000317
18	0.455912	0.456108	0.455987	0.456033	0.362115	0.362115	0.000196
19	0.455912	0.456033	0.455959	0.455987	0.362115	0.362115	0.000121
20	0.455959	0.456033	0.455987	0.456005	-	-	7.48E-05

จากตารางจะได้คำตอบสุดท้ายหลังจากการทำซ้ำทั้งหมด 20 รอบ คือ

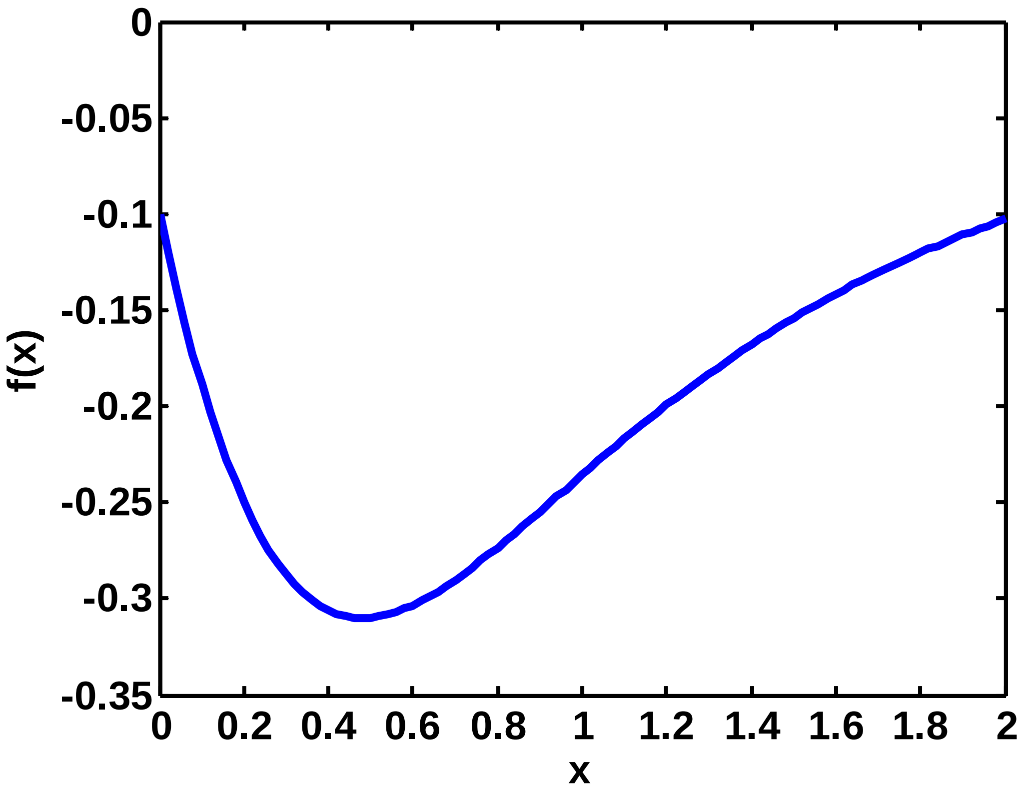
$$x^* = 0.4559 \longrightarrow f_{\max} = 0.3621$$

ตัวอย่างที่ 3.2 หาค่า minimum ของฟังก์ชัน $f(x) = 0.65 - [0.75/(1 + x^2)] - 0.65x\tan^{-1}(1/x)$

ภายในช่วง [0.0 , 1.8540] โดยใช้วิธี golden section search method และกำหนดให้ $\varepsilon = 1\times 10^{-4}$

Solution

เมื่อเราทำการ plot ด้วยมือ เราจะเห็นว่ากราฟให้คำตอบที่เป็น minimum ซึ่งมีค่า x ประมาณ 0.5 และให้ค่าของฟังก์ชันประมาณ -0.32 ซึ่งเราจะทำการหาคำตอบที่ถูกต้องด้วยวิธี Golden section search ดังต่อไปนี้



การคำนวณรอบที่ 1 ($n=1$)

$$b_{l,1} = 0.0$$
$$b_{u,1} = 1.8540$$
$$I_1 = 1.8540$$

หาตำแหน่งเริ่มต้นที่ใช้ในการประมาณฟังก์ชั่น จากสมการที่ (3.9) และ (3.10) จะได้

$$x_{l,1} = 1.8540 - (0.6180)(1.8540) = 0.7082 \longrightarrow f(x_{l,1}) = f(0.7082) = -0.2889$$
$$x_{u,1} = 0.0 + (0.6180)(1.8540) = 1.1458 \longrightarrow f(x_{u,1}) = f(1.1458) = -0.2087$$
$$f(x_{u,1}) > f(x_{l,1})$$

การคำนวณรอบที่ 2 ($n=2$)

$$b_{l,2} = b_{l,1} = 0.0$$
$$b_{u,2} = x_{u,1} = 1.1458$$
$$I_2 = b_{u,2} - b_{l,2} = 1.1458$$

ตรวจสอบค่า tolerance $I = 1.1854 > 10^{-4}$ ดังนั้นจึงคำนวณต่อ

$$x_{l,2} = b_{u,2} - KI_2 = 0.4377 \longrightarrow f(x_{l,2}) = f(0.4377) = -0.3089$$
$$x_{u,2} = x_{l,1} = 0.7082 \longrightarrow f(x_{u,2}) = f(0.7082) = -0.2889$$
$$f(x_{u,2}) > f(x_{l,2})$$

การคำนวณรอบที่ 3 ($n = 3$)

$$b_{l,3} = b_{l,2} = 0.0$$
$$b_{u,3} = x_{u,2} = 0.7082$$
$$I_3 = b_{u,3} - b_{l,3} = 0.7082$$

ตรวจสอบค่า tolerance $I = 0.7082 > 10^{-4}$ ดังนั้นจึงคำนวณต่อ

$$x_{l,3} = b_{u,3} - KI_3 = 0.2705 \longrightarrow f(x_{l,3}) = f(0.2705) = -0.2786$$
$$x_{u,3} = x_{l,2} = 0.4377 \longrightarrow f(x_{u,3}) = f(0.4377) = -0.3089$$
$$f(x_{u,3}) < f(x_{l,3})$$

การคำนวณรอบที่ 4 ($n = 4$)

$$b_{l,4} = x_{l,3} = 0.2705$$
$$b_{u,4} = b_{u,3} = 0.7082$$
$$I_4 = b_{u,4} - b_{l,4} = 0.4377$$

ตรวจสอบค่า tolerance $I = 0.4377 > 10^{-4}$ ดังนั้นจึงคำนวณต่อ

$$x_{l,4} = x_{u,3} = 0.4377 \longrightarrow f(x_{l,4}) = f(0.4377) = -0.3089$$
$$x_{u,4} = b_{l,4} + KI_4 = 0.5410 \longrightarrow f(x_{u,4}) = f(0.5410) = -0.3082$$
$$f(x_{u,4}) > f(x_{l,4})$$

การคำนวณรอบที่ 5 ($n = 5$)

$$b_{l,5} = b_{l,4} = 0.2705$$
$$b_{u,5} = x_{u,4} = 0.5410$$
$$I_5 = b_{u,5} - b_{l,5} = 0.2705$$

ตรวจสอบค่า tolerance $I = 0.2705 > 10^{-4}$ ดังนั้นจึงคำนวณต่อ

$$x_{l,5} = b_{u,5} - KI_5 = 0.3738 \longrightarrow f(x_{l,5}) = f(0.3738) = -0.3028$$
$$x_{u,5} = x_{l,4} = 0.4377 \longrightarrow f(x_{u,5}) = f(0.4377) = -0.3089$$
$$f(x_{u,5}) < f(x_{l,5})$$

การคำนวณรอบที่ 6 ($n = 6$)

$$b_{l,6} = x_{l,5} = 0.3738$$
$$b_{u,6} = b_{u,5} = 0.5410$$
$$I_6 = b_{u,6} - b_{l,6} = 0.1672$$

ตรวจสอบค่า tolerance $I = 0.1672 > 10^{-4}$ ดังนั้นจึงคำนวณต่อ

$$x_{l,6} = x_{u,5} = 0.4377 \longrightarrow f(x_{l,6}) = f(0.4377) = -0.3089$$
$$x_{u,6} = b_{l,6} + KI_6 = 0.4771 \longrightarrow f(x_{u,6}) = f(0.4771) = -0.3100$$
$$f(x_{u,6}) < f(x_{l,6})$$

การคำนวณรอบที่ 7 ($n = 7$)

$$b_{l,7} = x_{l,6} = 0.4377$$
$$b_{u,7} = b_{u,6} = 0.5410$$
$$I_7 = b_{u,7} - b_{l,7} = 0.1033$$

ตรวจสอบค่า tolerance $I = 0.1033 > 10^{-4}$ ดังนั้นจึงคำนวณต่อ ซึ่งในที่นี้เราจะเห็นได้ว่ายิ่งเพิ่มจำนวนรอบในการทำมากขึ้น ช่วงของคำตอบของฟังก์ชันก็จะแคบลง ทำให้ค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นน้อยลงตามไปด้วย และแนวโน้มของคำตอบจะลู่เข้าสู่ค่า minimum โดยเขียนสรุปเป็นตารางได้ดังนี้

Iteration	bl	bu	xl	xu	f(xl)	f(xu)	I
1	0	1.854	0.708228	1.145772	-0.28891	-0.20869	1.854
2	0	1.145772	0.437685	0.708087	-0.30893	-0.28893	1.145772
3	0	0.708087	0.270489	0.437598	-0.2786	-0.30893	0.708087
4	0.270489	0.708087	0.437652	0.540925	-0.30893	-0.30818	0.437598
5	0.270489	0.540925	0.373796	0.437618	-0.30279	-0.30893	0.270435
6	0.373796	0.540925	0.437639	0.477081	-0.30893	-0.31001	0.167129
7	0.437639	0.540925	0.477094	0.50147	-0.31001	-0.30979	0.103286
8	0.437639	0.50147	0.462022	0.477086	-0.30982	-0.31001	0.063831
9	0.462022	0.50147	0.477091	0.486401	-0.31001	-0.31	0.039447
10	0.462022	0.486401	0.471335	0.477088	-0.30997	-0.31001	0.024378
11	0.471335	0.486401	0.47709	0.480646	-0.31001	-0.31002	0.015066
12	0.47709	0.486401	0.480647	0.482844	-0.31002	-0.31002	0.009311
13	0.47709	0.482844	0.479288	0.480646	-0.31002	-0.31002	0.005754
14	0.479288	0.482844	0.480646	0.481486	-0.31002	-0.31002	0.003556
15	0.479288	0.481486	0.480127	0.480646	-0.31002	-0.31002	0.002198
16	0.480127	0.481486	0.480646	0.480967	-0.31002	-0.31002	0.001358
17	0.480646	0.481486	0.480967	0.481165	-0.31002	-0.31002	0.000839
18	0.480646	0.481165	0.480844	0.480967	-0.31002	-0.31002	0.000519
19	0.480646	0.480967	0.480769	0.480844	-0.31002	-0.31002	0.000321
20	0.480769	0.480967	0.480844	0.480891	-0.31002	-0.31002	0.000198
21	0.480769	0.480891	0.480816	0.480844	-0.31002	-0.31002	0.000122
22	0.480816	0.480891	0.480844	0.480862	-	-	7.57E-05

จากตารางจะได้คำตอบสุดท้ายหลังจากการทำซ้ำทั้งหมด 22 รอบ คือ

$$x^* = 0.4808 \longrightarrow f_{\min} = -0.3100$$

3.2.2 Fibonacci Search Method

Fibonacci search method ถูกคิดค้นขึ้นในปี ค.ศ.1966 โดย Avriel และ Wilde วิธี fibonacci search เป็นอีกวิธีหนึ่งที่ใช้ในการหาคำตอบของฟังก์ชัน เช่นเดียวกับ golden section search method แต่แตกต่างกันตรงที่ค่า K สามารถเปลี่ยนแปลงได้ขึ้นอยู่กับขนาดของ tolerance แต่เมื่อจำนวนการคำนวณมีค่ามากขึ้นเรื่อยๆ ค่า K ที่ได้จาก Fibonacci search method จะมีค่าเข้าใกล้ ค่า K ที่ได้จาก golden section search method ทั้งนี้วิธีการของ fibonacci search method ยังสามารถบอกจำนวนของ iterations ที่ใช้ในการหาคำตอบได้ล่วงหน้าอีกด้วย โดยรูปแบบทั่วไปค่าของ fibonanci สามารถเขียนได้ดังสมการที่ (3.21)

$$F_k = \frac{(\sqrt{5}+1)^{k+1} + (-1)^k(\sqrt{5}-1)^{k+1}}{2^{k+1}\sqrt{5}} \qquad (3.21)$$

จากสมการที่ (3.21) จะได้

$$F_0 = 1 \ , \ F_1 = 1 \qquad (3.22)$$

และ Fibonacci number เป็น

$$F_k = F_{k-2} + F_{k-1} \qquad \text{โดยที่} \qquad k \geq 2 \qquad (3.23)$$

ตารางที่ 3.1 Fibonacci numbers

k	F_k	k	F_k
0	1	10	89
1	1	11	144
2	2	12	233
3	3	13	377
4	5	14	610
5	8	15	987
6	13	16	1597
7	21	17	2584
8	34	18	4181
9	55	19	6765

วิธีของ fibonacci search method สามารถประมาณหาจำนวน Iterations หรือจำนวนในการซ้ำรอบ ได้จากค่า tolerance โดยที่

$$F_k = \frac{1}{\varepsilon} \tag{3.24}$$

ตัวอย่างที่ 3.3 กำหนดให้ค่าของ tolerance เท่ากับ 0.0001 จะได้

$$F_k \geq 1000$$

จากตารางที่ 3.1 เลือกค่าของ F_k ที่มากกว่าค่าที่ได้ คือ $F_{16} = 1597 > 1000$ ดังนั้นต้องประมาณทั้งหมด 16 ครั้ง ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวน iterations กับค่า tolerance แสดงในตารางที่ 3.2

ตารางที่ 3.2 Fibonacci method iterations

Tolerance	Number of Iterations
0.00001	25
0.00002	24
0.00005	22
0.0001	20
0.0002	19
0.0005	17
0.001	16
0.002	14
0.005	12
0.01	11
0.02	9
0.05	7
0.10	6

ขั้นตอนในการทำ fibonacci search method คล้ายกับการทำ golden section search method โดยที่ค่า K ในวิธี golden section search method เป็นค่าคงที่ $K = 0.6180$ แต่ค่า K ในวิธี fibonacci search method จะมีการเปลี่ยนแปลงตามสมการ

$$K = \frac{F_{k-1}}{F_k} \tag{3.25}$$

ดังนั้นแทนค่า K ในสมการ (3.8) และ (3.9) จะได้

$$x_l = b_u - \left(\frac{F_{k-1}}{F_k}\right) I \tag{3.26}$$

$$x_u = b_l + \left(\frac{F_{k-1}}{F_k}\right) I \tag{3.27}$$

<u>Minimum problem</u>

ถ้า $f(x_{l,j}) \le f(x_{u,j})$ แล้ว

$$b_{l,j+1} = b_{l,j} \tag{3.28}$$

$$b_{u,j+1} = x_{u,j} \tag{3.29}$$

$$I_{j+1} = b_{u,j+1} - b_{l,j+1} \tag{3.30}$$

$$x_{l,j+1} = b_{u,j+1} - \frac{F_{n-j-1}}{F_{n-j}} I_{j+1} \tag{3.31}$$

$$x_{u,j+1} = x_{l,j} \tag{3.32}$$

ถ้า $f(x_{l,j}) > f(x_{u,j})$ แล้ว

$$b_{l,j+1} = x_{l,j} \tag{3.33}$$

$$b_{u,j+1} = b_{u,j} \tag{3.34}$$

$$I_{j+1} = b_{u,j+1} - b_{l,j+1} \tag{3.35}$$

$$x_{l,j+1} = x_{u,j} \tag{3.36}$$

$$x_{u,j+1} = b_{l,j+1} + \frac{F_{n-j-1}}{F_{n-j}} I_{n+1} \tag{3.37}$$

<u>Maximum problem</u>

ถ้า $f(x_{l,j}) \le f(x_{u,j})$ แล้ว ให้ใช้เงื่อนไขของสมการที่ (3.33)-(3.37)

ถ้า $f(x_{l,j}) > f(x_{u,j})$ แล้ว ให้ใช้เงื่อนไขของสมการที่ (3.28)-(3.32)

ตัวอย่างที่ 3.4 หาค่า maximum ของฟังก์ชั่น $f(x) = x\cos(\pi x^2)$ ในช่วง [0.0 , 0.7] โดยให้ $\varepsilon = 1\times 10^{-4}$

<u>Solution</u>

การคำนวณรอบที่ 1 ($j = 1$)

จากการที่เรารู้ว่า $\varepsilon = 1 \times 10^{-4}$ นั้น เรานำค่า tolerance มาหาค่า K ที่จะใช้ในแต่ละการคำนวณ (iteration) โดยที่ ค่า F_{20} ที่สอดคล้องกับ tolerance ที่กำหนด มีค่าเป็น 10946 โดยมีจำนวนการทำซ้ำทั้งหมด 20 รอบ ดังนั้นค่า F_k ในการคำนวณรอบที่ 1 จะมีค่าเป็น $\dfrac{F_{19}}{F_{20}}$

$$b_{l,1} = 0.0$$
$$b_{u,1} = 0.7$$
$$I_1 = 0.7$$

หาตำแหน่งเริ่มต้นที่ใช้ในการประมาณฟังก์ชั่น จากสมการที่ (3.26) และ (3.27) จะได้

$$x_{l,1} = 0.7 - \left(\frac{6765}{10946}\right)(0.7) = 0.2673 \longrightarrow f(x_{l,1}) = f(0.2674) = 0.26063$$
$$x_{u,1} = 0.0 + \left(\frac{6765}{10946}\right)(0.7) = 0.4326 \longrightarrow f(x_{u,1}) = f(0.4326) = 0.35996$$
$$f(x_{l,1}) < f(x_{u,1})$$

การคำนวณรอบที่ 2 ($j = 2$)

$$b_{l,2} = x_{l,1} = 0.2673$$
$$b_{u,2} = b_{u,1} = 0.7$$
$$I_2 = b_{u,2} - b_{l,2} = 0.7 - 0.2673 = 0.4327$$

$$x_{l,2} = x_{u,1} = 0.4326 \longrightarrow f(x_{l,2}) = f(0.4326) = 0.3600$$
$$x_{u,2} = b_{l,2} + \left(\frac{4181}{6765}\right)I_2 = 0.5348 \longrightarrow f(x_{u,2}) = f(0.4326) = 0.3331$$
$$f(x_{l,2}) > f(x_{u,2})$$

เมื่อคำนวณต่อไปเรื่อยๆจนครบจำนวนทั้งสิ้น 20 รอบ เราจะได้ค่าตามตาราง

Iteration	bl	bu	xl	xu	f(xl)	f(xu)	I
1	0	0.7	0.267376	0.432624	0.260661	0.359968	0.7
2	0.267376	0.7	0.432624	0.534752	0.359968	0.33309	0.432624
3	0.267376	0.534752	0.369505	0.432624	0.336031	0.359968	0.267376
4	0.369505	0.534752	0.432624	0.471633	0.359968	0.361086	0.165248
5	0.432624	0.534752	0.471633	0.495743	0.361086	0.35518	0.102129
6	0.432624	0.495743	0.456733	0.471633	0.362113	0.361086	0.063119

7	0.432624	0.471633	0.447524	0.456733	0.361825	0.362113	0.03901
8	0.447524	0.471633	0.456733	0.462425	0.362113	0.361945	0.024109
9	0.447524	0.462425	0.453216	0.456733	0.362084	0.362113	0.0149
10	0.453216	0.462425	0.456733	0.458907	0.362113	0.362081	0.009209
11	0.453216	0.458907	0.45539	0.456733	0.362114	0.362113	0.005692
12	0.453216	0.456733	0.454559	0.45539	0.362107	0.362114	0.003517
13	0.454559	0.456733	0.45539	0.455902	0.362114	0.362115	0.002174
14	0.45539	0.456733	0.455902	0.456221	0.362115	0.362115	0.001343
15	0.45539	0.456221	0.45571	0.455902	0.362115	0.362115	0.000831
16	0.45571	0.456221	0.455902	0.45603	0.362115	0.362115	0.000512
17	0.455902	0.456221	0.45603	0.456094	0.362115	0.362115	0.00032
18	0.455902	0.456094	0.455966	0.45603	0.362115	0.362115	0.000192
19	0.455966	0.456094	0.45603	0.45603	0.362115	0.362115	0.000128
20	0.45603	0.456094	0.45603	0.456062	-	-	6.40E-05

จากตารางจะได้คำตอบสุดท้ายหลังจากการทำซ้ำทั้งหมด 20 รอบ คือ

$$x^* = 0.4560 \longrightarrow f_{\max} = 0.3621$$

ซึ่งค่าที่ได้จะมีค่าใกล้เคียงกับ Golden Section Search Method

3.3 การหาค่าเหมาะสมที่สุดด้วยวิธี Approximation Method

ในหลักการของ approximation method นั้น เราจะประมาณ objective function ให้เป็นพหุนามอันดับต่ำ โดยทั่วไปจะใช้ quadratic polynomial หรือ พหุนามอันดับที่ 2 และ cubic polynomial หรือ พหุนามอันดับที่ 3 ซึ่งในบทนี้จะนำเสนอวิธีการของ quadratic method เท่านั้น เนื่องจากเป็นวิธีที่ง่ายและเพียงพอในการประมาณ

3.3.1 Quadratic Method

โดยทั่วไปแล้ว เราสามารถประมาณ objective function ให้เป็น quadratic function หรือ พหุนามอันดับสอง (2nd order polynomial) ที่อยู่ในรูป

$$f(x) = ax^2 + bx + c \tag{3.38}$$

และเมื่อเราหาค่า minimum value ของ x จาก $f'(x) = 0$ จะได้

$$x^* = -\frac{b}{2a} \tag{3.39}$$

จะเห็นได้ว่าการที่เราจะหาจุด minimum ได้เราจำเป็นต้องรู้ค่าของ a และ b ซึ่งเราสามารถทำการประมาณหาค่าพารามิเตอร์ดังกล่าวได้จากการเลือกจุด 3 จุด คือ x_1, x_2 และ x_3 ที่มีค่าของฟังก์ชันเป็น f_1, f_2 และ f_3 และเราสามารถเขียนสมการให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \tag{3.40}$$

เมื่อเราแก้สมการที่ (3.40) เพื่อหาค่าของ a และ b ได้แล้ว นำค่าดังกล่าวไปแทนในสมการที่ (3.39) จะได้ค่าของจุดต่ำสุดเป็น

$$x^* = \frac{\left(x_2^2 - x_3^2\right) f_1 + \left(x_3^2 - x_1^2\right) f_2 + \left(x_1^2 - x_2^2\right) f_3}{2\left[(x_2 - x_3)\, f_1 + (x_3 - x_1)\, f_2 + (x_1 - x_2)\, f_3\right]} \tag{3.41}$$

ถ้าจุด 3 จุดมีระยะห่างระหว่างจุดที่เท่ากัน เท่ากับระยะ h และ x_2 เป็นจุดกึ่งกลางระหว่างจุดทั้ง 3 จุดแล้ว $x_1 = x_2 - h$ และ $x_3 = x_2 + h$ สามารถเขียนสมการที่ (3.41) ใหม่ได้เป็น

$$x^* = x_2 + \frac{h(f_1 - f_3)}{2(f_3 - 2f_2 + f_1)} \tag{3.42}$$

จะเห็นได้ว่าค่าที่ได้จากสมการที่ (3.41) หรือ (3.42) เป็นค่าที่ทำให้เกิดจุดต่ำสุดของ objective function เมื่อฟังก์ชันนี้ถูกประมาณให้เป็นพหุนามอันดับที่ 2

ตัวอย่างที่ 3.5 หาค่า minimum ของฟังก์ชัน $f(x) = 2x^2 + \dfrac{16}{x}$ บนช่วง $1 \le x \le 5$

Solution กำหนดให้จุด $x_1 = 1$, $x_3 = 5$ และ $x_2 = 3$ เป็นจุดกึ่งกลางช่วง จะได้

$$f(x_1) = 2x_1^2 + \frac{16}{x_1} = 18$$

$$f(x_2) = 2x_2^2 + \frac{16}{x_2} = 23.33$$

$$f(x_3) = 2x_3^2 + \frac{16}{x_3} = 53.2$$

เนื่องจาก step h มีค่าเท่ากับ 2 สามารถหาค่า minimum ได้จากสมการที่ (3.42)

$$x^* = 3 + \frac{2(18 - 53.2)}{2(53.2 - 2(23.33) + 18)} = 1.5656$$

ค่าของจุดต่ำสุดที่หาได้จากการประมาณ objective function ให้เป็นสมการพหุนามอันดับที่ 2 นั้น มีค่าเป็น 1.5656 แต่ค่าของจุดต่ำสุดของสมการที่แท้จริงแล้วคือ $x^* = 1.5874$ จะเห็นได้ว่า การประมาณนั้นจะให้คำตอบที่ใกล้เคียงกับค่าจริงซึ่งไม่ถูกต้อง 100% แต่คำตอบที่ได้นั้นสามารถหาได้รวดเร็วและง่ายกว่าการใช้วิธี search method ดังที่ได้อธิบายมา

3.4 Combination Method

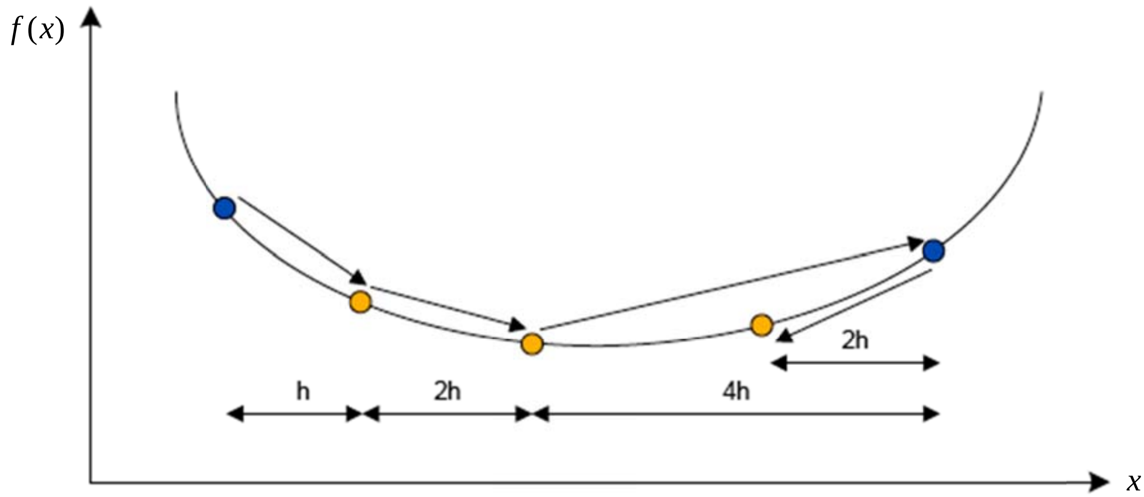
Combination method เป็นวิธีที่รวมกันระหว่าง search method และ approximation method โดยในบทนี้จะนำเสนอ combination method ทั้งหมด 3 วิธีด้วยกัน ได้แก่ DSC method, Powell's method และ Arithmetic mean method

3.4.1 Davies, Swann and Campey (DSC) method

วิธีการหาจุดต่ำสุดของ DSC method นี้ เป็นการผสมผสานระหว่าง approximation method และ search method ซึ่งในการประมาณนั้น เราจะประมาณให้ objective function เป็นสมการพหุนามที่ 2 โดยหาค่าพารามิเตอร์แบบใช้จุด 3 จุด ดังที่อธิบายมา โดยขั้นตอนในการหาจุดต่ำสุดโดย DSC method มีดังต่อไปนี้

1. กำหนดจุดเริ่มต้น หรือ x_1 ที่จะใช้หาค่าจุดต่ำสุดพร้อมทั้งหาค่าของฟังก์ชัน $f(x_1)$
2. กำหนดทิศทาง (direction) และ ระยะกระโดด (step size) ที่จะเคลื่อนที่ไปยังจุดต่อไป ทั้งนี้จะเรียกระยะนี้ว่า Δx
3. คำนวณหาจุดที่ 2 หรือ x_2 พร้อมทั้งหาค่าของฟังก์ชัน $f(x_2)$ โดย $x_2 = x_1 + \Delta x$ แล้วทำการเปรียบเทียบ $f(x_2)$ กับ $f(x_1)$ ถ้าพบว่า $f(x_1) > f(x_2)$ ให้ทำขั้นตอนถัดไป แต่ถ้า $f(x_1) < f(x_2)$ ให้ทำการเลือกทิศทางการกระโดดและระยะกระโดดใหม่
4. เพิ่ม step size เป็น 2 เท่า หรือ $2\Delta x$ พร้อมทั้งคำนวณหาจุดที่ 3 หรือ x_3 และค่าของฟังก์ชัน $f(x_3)$ โดย $x_3 = x_2 + 2\Delta x$
5. เปรียบเทียบค่าของฟังก์ชันของจุดที่ 2 และจุดที่ 3 $f(x_2), f(x_3)$ ถ้าพบว่าค่าของฟังก์ชันมีการลดค่าลง $f(x_2) > f(x_3)$ ให้ทำกระบวนการ search ต่อไปโดยทำซ้ำในข้อที่ 4 แต่ถ้าพบว่าค่าของฟังก์ชันมีการเพิ่มค่าขึ้น $f(x_2) < f(x_3)$ ให้ทำการกลับทิศทางของการกระโดด พร้อมกับลดระยะของ step size ลงครึ่งหนึ่ง และหาจุดใหม่เพื่อเปรียบเทียบต่อไป
6. เมื่อเกิดการเพิ่มค่าของฟังก์ชันขึ้น เราจะได้จุด 4 จุดซึ่งจะทำการเลือกพิจารณาเฉพาะ 3 จุดเท่านั้น โดยตัดจุดที่มีค่าของฟังก์ชันมากที่สุดออกไป แล้วใช้ approximation method ของจุด 3 จุด ที่ได้อธิบายมาข้างต้น คำนวณหาค่าต่ำสุดต่อไป

รูปที่ 3.4 เป็นการอธิบายการหาจุดต่ำสุดโดยใช้ DSC method จะเห็นได้ว่าจุดเริ่มต้นอยู่ที่จุดซ้ายมือสุด มีทิศทางการกระโดดไปทางด้านขวามือ และมีระยะกระโดดเริ่มต้นเป็นระยะ h เมื่อหาจุดที่ 2 และค่าของฟังก์ชัน พบว่ามีค่าของฟังก์ชันลดลงจึงทำการเพิ่ม step size เป็น 2 เท่า และกระโดดต่อในทิศทางเดิม ทำให้ได้จุดที่ 3 และเมื่อหาค่าของฟังก์ชันในจุดที่ 3 พบว่ามีค่าของฟังก์ชันลดลง จึงเพิม step size เป็น 2 เท่า และกระโดดต่อในทิศทางเดิม ทำให้ได้จุดที่ 4 และเมื่อหาค่าของฟังก์ชันในจุดที่ 4 พบว่ามีค่าของฟังก์ชันเพิ่มขึ้น จึงต้องเปลี่ยนทิศทางย้อนกลับมาพร้อมกับลดขนาดของ step size ลงครึ่งหนึ่ง ซึ่งก็จะได้จุดที่ 5 หลังจากเกิดการเพิ่มค่าขึ้นของฟังก์ชัน ตอนนี้เราจะพิจารณาจุด 4 จุด คือ จุดที่ 2 3 4 และ 5 ว่าจุดใดมีค่าของฟังก์ชันมากที่สุด ซึ่งเราจะตัดจุดที่ 4 ทิ้งไป และเหลือพิจารณาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจากจุด 3 จุด คือจุดที่ 2 3 และ 5 โดยใช้สมการที่ (3.42) ในการคำนวณ



รูปที่ 3.4: DSC interpolation method

ตัวอย่างที่ 3.6 หาค่า minimum ของฟังก์ชั่น $f(x) = 4x^2 - 12x + 9$ กำหนด step size เท่ากับ 0.5 จุดเริ่มต้นที่ $x = 0$

Solution

1. หาค่าของฟังก์ชันจากจุดที่ 1 $x_1 = 0$ $f(x_1) = f(0) = 9$
2. หาค่าจุดที่ 2 พร้อมค่าของฟังก์ชัน $x_2 = 0 + 0.5 = 0.5 \longrightarrow f(x_2) = f(0.5) = 4$
   เนื่องจาก $f(x_2) < f(x_1)$ เพิ่ม step size เป็น $2h = 1$ และกระโดดต่อเพื่อหาจุดถัดไป
3. หาค่าจุดที่ 3 พร้อมค่าของฟังก์ชัน $x_3 = 0.5 + 1 = 1.5 \longrightarrow f(x_3) = f(0.5) = 0$
   เนื่องจาก $f(x_3) < f(x_2)$ เพิ่ม step size เป็น $4h = 2$ และกระโดดต่อเพื่อหาจุดถัดไป
4. หาค่าจุดที่ 4 พร้อมค่าของฟังก์ชัน $x_4 = 1.5 + 2 = 3.5 \longrightarrow f(x_4) = f(3.5) = 16$
   เนื่องจาก $f(x_4) > f(x_3)$ ดังนั้นลด step size เป็น $2h = 1$ และกลับทิศทางของฟังก์ชั่น และกระโดดต่อเพื่อหาจุดถัดไป
5. หาค่าจุดที่ 5 พร้อมค่าของฟังก์ชัน $x_5 = 3.5 - 1 = 2.5 \longrightarrow f(x_5) = f(2.5) = 4$
6. หลังจากที่เกิดการเพิ่มขึ้นของฟังก์ชัน จะได้จุด 4 จุด ซึ่งเราจะตัดจุดที่ 4 ทิ้งไปเนื่องจากมีค่าของฟังก์ชันมากที่สุด และจะเลือกพิจารณาเฉพาะจุด 3 จุดเท่านั้นคือ $\{0.5, 1.5, 2.5\}$ ซึ่งค่าของฟังก์ชั่นทั้ง 3 จุดมีค่าเป็น $\{4, 0, 4\}$ กำหนดให้จุด $x_2 = 1.5$ เป็นจุดกึ่งกลาง และค่า step size $h = 1$ และนำไปคำนวณค่าจุดต่ำสุดจากสมการที่ (3.42) ซึ่งมีสมการเป็น

$$x^* = x_2 + \frac{h(f_1 - f_3)}{2(f_3 - 2f_2 + f_1)}$$

   แทนค่าทั้งหมดลงในสมการจะได้ $x^* = 1.5$

ตัวอย่างที่ 3.7 หาค่า minimum ของฟังก์ชัน $f(x) = 2x^2 + \frac{16}{x}$ กำหนด step size เท่ากับ 0.01 จุดเริ่มต้นที่ $x = 1$

<u>Solution</u> เมื่อทำการหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันโดย DSC method แล้ว เราสามารถเขียนสรุปได้เป็นตารางดังต่อไปนี้

point #	x	fx	h
1	1	18	0.01
2	1.01	17.88178	0.02
3	1.03	17.65578	0.04
4	1.07	17.24307	0.08
5	1.15	16.55804	0.16
6	1.31	15.64594	0.32
7	1.63	15.12975	0.64
8	2.27	17.35426	0.32
9	1.95	15.81013	-

จุด 3 จุดที่สนใจจะนำมาพิจารณาคือจุดที่ 6 7 และ 9 ซึ่งเมื่อนำค่าของจุดทั้ง 3 มาเข้าสมการ (3.42) จะได้ $x^* = 1.6080$ เป็นค่าของจุดต่ำสุดที่หาได้จาก DSC method ซึ่งค่าต่ำสุดที่ถูกต้องนั้นมีค่าเป็น $x^* = 1.5874$ จะเห็นได้ว่าค่าที่ได้จากการใช้ DSC method นั้นมีความผิดพลาดมาก

3.4.2 Powell's method of Quadratic Interpolation

ใน Powell's method of quadratic interpolation นี้ เราจะอธิบายวิธีการหาค่าจุดต่ำสุดของ objective function บนเส้นตรง $x_1 + \lambda d$ โดย x_1 เป็นจุดปัจจุบันที่คำนวณได้ (current point) และ d เป็นทิศทางที่ใช้ในการเดินทาง (search direction) วิธีการของ Powell's method นี้จะเป็นการหาพหุนามลำดับที่ 2 ที่มีค่าของฟังก์ชันเท่ากับ $f(x_1 + \lambda d)$ ของจุด 3 จุดที่เราสนใจ ซึ่งจะมีการคำนวณซ้ำไปเรื่อยๆ จนกว่าจะได้ค่า tolerance ตามที่ต้องการ

กำหนดให้จุดทั้ง 3 จุดบนเส้นตรง $x_1 + \lambda d$ มีค่าเป็น $x_1 + ad$, $x_1 + bd$, และ $x_1 + cd$ ค่าของฟังก์ชันที่สอดคล้องกับทั้ง 3 จุด มีค่าเป็น

$$f_a = f(x_1 + ad) \tag{3.43}$$

$$f_b = f(x_1 + bd) \tag{3.44}$$

$$f_c = f(x_1 + cd) \tag{3.45}$$

กำหนดให้พหุนามลำดับที่ 2 มีรูปแบบเป็น

$$f(\lambda) = f_0 + f_1\lambda + f_2\lambda^2 \tag{3.46}$$

จะได้

$$f_a = f(a) = f_0 + f_1 a + f_2 a^2 \tag{3.47}$$

$$f_b = f(b) = f_0 + f_1 b + f_2 b^2 \tag{3.48}$$

$$f_c = f(c) = f_0 + f_1 c + f_2 c^2 \tag{3.49}$$

จากสมการที่ (3.47) – (3.49) สามารถแก้สมการหา f_0 , f_1 และ f_2 ได้เป็น

$$f_0 = \frac{bc(c-b)\,f_a + ac(a-c)\,f_b + ab(b-a)\,f_c}{(a-b)(b-c)(c-a)} \tag{3.50}$$

$$f_1 = \frac{(b^2-c^2)\,f_a + (c^2-a^2)\,f_b + (a^2-b^2)\,f_c}{(a-b)(b-c)(c-a)} \tag{3.51}$$

$$f_2 = \frac{(c-b)\,f_a + (a-c)\,f_b + (b-a)\,f_c}{(a-b)(b-c)(c-a)} \tag{3.52}$$

หาค่า λ จากสมการที่ (3.46) โดยให้ $f'(\lambda) = 0$ จะได้

$$\lambda = -\frac{f_1}{2f_2} \tag{3.53}$$

ค่า λ ที่ได้จากสมการ (3.53) จะเป็นค่าจุดต่ำสุด ก็ต่อเมื่อ $f''(\lambda) > 0$ ซึ่งถ้าเกิดค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน หรือ $\lambda_{\min}$ แล้ว เราสามารถหาค่าต่ำสุดนี้ได้จากสมการที่ (3.51) ถึง (3.53) โดยที่

$$\lambda_{\min} = \frac{0.5\left[\left((b^2-c^2)\,f_a + (c^2-a^2)\,f_b + (a^2-b^2)\,f_c\right)\right]}{(b-c)\,f_a + (c-a)\,f_b + (a-b)\,f_c} \tag{3.54}$$

และ $f(\lambda)$ จะให้ค่าต่ำสุดถ้า

$$\frac{(b-c)\,f_a + (c-a)\,f_b + (a-b)\,f_c}{(a-b)(b-c)(c-a)} < 0 \tag{3.55}$$

ขั้นตอนในการทำ Powell's method มีดังนี้

1. กำหนด step size h และ direction vector d โดยทั่วไปจะใช้เป็น unit vector
2. กำหนดค่าของจุดเริ่มต้น x_1 , tolerance และ step size ไกลที่สุดที่สามารถกระโดดไปได้ M
3. หาค่าของฟังก์ชันที่จุด $a = x_1$ และ $b = x_1 + hd$
    - ถ้า $f(x_1) < f(x_1 + hd)$ ทำการกระโดดย้อนกลับเพื่อหาค่าของฟังก์ชันที่จุด $c = x_1 - hd$

4. ถ้า $f(x_1) > f(x_1+hd)$ ทำการกระโดดต่อไปข้างหน้าเพื่อหาค่าของฟังก์ชันที่จุด $c = x_1 + 2hd$
5. หาค่า $\lambda_{\min}$ ของจุดสามจุด จากสมการที่ (3.54)
6. เช็คระยะห่างระหว่าง $\lambda_{\min}$ กับจุดที่อยู่ใกล้สุดว่ามีระยะเป็นเท่าใด
    - ถ้าระยะห่างมีค่ามากกว่า M ทำการกระโดดจากจุดที่อยู่ใกล้ $\lambda_{\min}$ ที่สุดไป Md แล้วแทนจุดนั้นด้วยค่า M จากนั้นจึงคำนวณหาค่า $\lambda_{\min}$ ใหม่ด้วยสมการ (3.54)
    - ถ้าระยะห่างมีค่าน้อยกว่า M ให้ทำการเปรียบเทียบระยะห่างระหว่าง $\lambda_{\min}$ กับจุดที่อยู่ใกล้สุด
        - ถ้าระยะห่างมีค่าน้อยกว่า tolerance ค่า $\lambda_{\min}$ ที่ได้คือค่าต่ำสุด
        - ถ้าระยะห่างมีค่ามากกว่า tolerance ให้แทนจุดที่ให้ค่าฟังก์ชันสูงสุดด้วย $\lambda_{\min}$ แล้วคำนวณหาค่า $\lambda_{\min}$ ใหม่ด้วยสมการ (3.54)

ตัวอย่างที่ 3.7 หาค่า minimum ของฟังก์ชัน $f(x) = x^3 + 6x^2 - 4x - 8$ บนช่วง $0 \le x \le 1$
โดยกำหนดให้จุดเริ่มต้น $x = 0$ $M = 0.3$ และ step size = 0.01 และ tolerance = 0.001

<u>Solution</u> เราจะเริ่มจากการหาจุดสามจุดหรือ a,b,c ตามที่ต้องการก่อน ซึ่งในที่นี้ โจทย์กำหนดให้ $a = 0$ มีทิศทางการเคลื่อนที่ไปทางขวา และ $h = 0.01$

Iteration #	a	b	c	fa	fb	fc	$x_{\min}$	$f_{\min}$
1	0	0.01	0.02	-8	-8.0394	-8.0776	0.3317	-8.6302
2	0	0.01	0.3	-8	-8.0394	-8.6330	0.3172	-8.6332
3	0.3172	0.01	0.3	-8.6332	-8.0394	-8.6330	0.3094	-8.6336
4	0.3172	0.3094	0.3	-8.6332	-8.6336	-8.6330	0.3094	-8.6336

ดังนั้นจะได้ค่า minimum ของฟังก์ชันนี้ เท่ากับ $f_{\min} = -8.6336$ ที่จุด $x_{\min} = 0.3094$

3.4.3 Arithmetic mean method

ขั้นตอนในการทำ Arithmetic mean method มีดังนี้

1. หาจุด 3 จุด (a,b,c) ที่ให้ convex function $(f_a \ge f_b \le f_c)$ โดยที่กำหนดให้ x_1 เป็นจุดเริ่มต้น $x_2 = x_1 +$ step size และ $x_3 = 2x_2$ และ $(x_4 = 2x_3, x_5 = 2x_4, \ldots)$
2. หาค่า mean ของจุด 3 จุดในช่วง convex function จะได้ $s = \dfrac{a+b+c}{3}$

3. ถ้าค่า $s = b$ กำหนดค่า s มีค่าเป็น $s = \dfrac{2b+c}{3}$

4. ตรวจสอบค่า tolerance ถ้า $\dfrac{|f_b - f_s|}{f_s} \le \varepsilon$ จะได้คำตอบของฟังก์ชันเป็น $f(s)$ แต่ถ้า $\dfrac{|f_b - f_s|}{f_s} > \varepsilon$ ให้กำหนดค่า b ตัวใหม่จาก $f_b = \min(f_s, f_b)$ และเลือกจุดอีก 2 จุดที่อยู่ติดกับ b ตัวใหม่ ที่ทำให้ b ตัวใหม่เป็นจุดกึ่งกลางของ convex function และทำซ้ำข้อ 2 จนกระทั่งได้ค่า tolerance ตามที่ต้องการ

ตัวอย่างที่ 3.8 หาค่า minimum ของฟังก์ชั่น $f(x) = 4x^2 - 12x + 9$ กำหนด step size เท่ากับ 0.3, จุดเริ่มต้นที่ $x = 0$ และค่า tolerance $\varepsilon = 0.001$

Solution

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0 & &\rightarrow & f(x_1) &= 9 \\
x_2 &= 0.3 & &\rightarrow & f(x_2) &= 5.76 \\
x_3 &= 0.6 & &\rightarrow & f(x_3) &= 3.2 \\
x_4 &= 1.2 & &\rightarrow & f(x_4) &= 0.36 \\
x_5 &= 2.4 & &\rightarrow & f(x_5) &= 3.24
\end{aligned}
$$

จะได้ convex function ที่จุด $a = x_3 = 0.6$, $b = x_4 = 1.2$ และ $c = x_5 = 2.4$ หา arithmetic mean $s = \dfrac{a+b+c}{3}$ จะได้

$$s = \frac{0.6+1.2+2.4}{3} = \frac{4.2}{3} = 1.4 \qquad \rightarrow \qquad f(s) = 0.04$$

ตรวจสอบค่า tolerance จาก

$$\frac{|f_b - f_s|}{f_s} = \frac{|0.36 - 0.04|}{0.04} = 8 > \varepsilon$$

เนื่องจากค่าที่คำนวณได้มีค่ามากกว่า tolerance ดังนั้น จึงหาช่วงที่ทำให้เกิด convex function ขึ้นมาใหม่ โดยมีจุด s เป็นจุดกึ่งกลางเนื่องจาก $f(s) < f(b)$ ดังนั้นในการทำซ้ำรอบถัดมา เราจะกำหนดค่า $a = 0.6$, $b = 1.4$, $c = 2.4$ และทำซ้ำอีกรอบจนกระทั่ง ได้ค่า tolerance ที่ยอมรับได้ จะได้ค่าตามตาราง

Iteration #	a	b	c	s	f(s)
1	0.6	1.2	2.4	1.4	0.04
2	1.2	1.4	2.4	1.666667	0.111111
3	1.2	1.4	1.666667	1.422222	0.024198
4	1.4	1.422222	1.666667	1.496296	5.49E-05

5	1.422222	1.496296	1.666667	1.528395	0.003225
6	1.422222	1.496296	1.528395	1.482305	0.001253
7	1.482305	1.496296	1.528395	1.502332	2.18E-05
8	1.496296	1.502332	1.528395	1.509008	0.000325
9	1.496296	1.502332	1.509008	1.502545	2.59E-05
10	1.496296	1.502332	1.502545	1.500391	6.12E-07
11	1.496296	1.500391	1.502332	1.499673	4.27E-07
12	1.496296	1.499673	1.500391	1.498787	5.89E-06
13	1.498787	1.499673	1.500391	1.499617	5.87E-07
14	1.499617	1.499673	1.500391	1.499894	4.51E-08
15	1.499673	1.499894	1.500391	1.499986	7.78E-10
16	1.499894	1.499986	1.500391	1.50009	3.27E-08
17	1.499894	1.499986	1.50009	1.49999	3.94E-10
18	1.499986	1.49999	1.50009	1.500022	1.96E-09
19	1.499986	1.49999	1.500022	1.499999	1.30E-12
20	1.49999	1.499999	1.500022	1.500004	6.05E-11
21	1.49999	1.499999	1.500004	1.499998	1.94E-11
22	1.499998	1.499999	1.500004	1.5	5.52E-13
23	1.499999	1.5	1.500004	1.500001	6.05E-12
24	1.499999	1.5	1.500001	1.5	4.74E-13
25	1.499999	1.5	1.5	1.5	8.88E-15
26	1.499999	1.5	1.5	1.5	1.42E-14
27	1.5	1.5	1.5	1.5	4.97E-14
28	1.5	1.5	1.5	1.5	3.55E-15
29	1.5	1.5	1.5	1.5	0
30	1.5	1.5	1.5	1.5	0

โดยสุดท้ายจะให้ค่า minimum ของฟังก์ชันที่จุด $x = 1.5$

3.5 MATLAB Solution

สำหรับบทนี้ สามารถใช้ฟังก์ชันในโปรแกรม MATLAB ที่เรียกว่า ‘fminbnd’ ในการหาคำตอบด้วยวิธี search method โดยที่โครงสร้างของคำสั่งจะใช้ตามอัลกอริทึ่มของ golden section search method และจะเห็นได้ว่าคำสั่งนี้จะใช้กับปัญหาที่อยู่ในรูปของ minimum problem ดังนั้นถ้าต้องการหาคำตอบของปัญหาที่อยู่ในรูปของ maximum problem ต้องคูณ -1 ที่ objective function เพื่อจะให้เข้าใจได้ง่าย จะมีการยกตัวอย่างทั้งที่เป็นแบบ minimum problem และแบบ maximum problem ดังนี้

ตัวอย่างที่ 3.9 หาค่า minimum ของฟังก์ชัน $f(x) = x^2(e^{-x} + \cos(\pi x))$ ในช่วง [1.75 , 3.25]

<u>Solution</u>

MATLAB Code

```
>> f=@(x)x^2*(exp(-x)+cos(pi*x));
>> [x,fval]=fminbnd(f,1.75,3.25)
x =
    3.0668
fval =
   -8.7609
```

ดังนั้นจะได้ค่าของ x เป็น 3.0668 ที่ทำให้คำตอบของฟังก์ชันเป็น minimum เท่ากับ -8.7609

ตัวอย่างที่ 3.10 หาค่า maximum ของฟังก์ชัน $f(x) = x\cos(\pi x^2)$ ในช่วง [0.0 , 0.7] โดยให้

$\varepsilon = 1\times 10^{-4}$

<u>Solution</u>

เนื่องจากโจทย์ต้องการหาค่า maximum ของฟังก์ชัน ดังนั้นฟังก์ชั่นที่ใส่ในโปรแกรมต้องอยู่ในรูปของ minimum problem ดังนี้

$$f(x) = -x\cos(\pi x^2)$$

MATLAB Code

```
>> f=@(x)-x*cos(pi*(x^2));
>> [x,fval]=fminbnd(f,0,0.7,1e-4)
x =
    0.4560
fval =
   -0.3621
```

ดังนั้นจะได้ค่าของ x เป็น 0.4560 ที่ทำให้คำตอบของฟังก์ชันเป็น maximum เท่ากับ 0.3621 (เนื่องจาก objective function ถูกคูณด้วย -1 ดังนั้นคำตอบของฟังก์ชันต้องคูณด้วย -1 เช่นเดียวกัน)