บทที่ 2
กำหนดการเชิงเส้น
(Linear Programming)

กำหนดการเชิงเส้น หรือที่เรียกว่า linear programming เป็นเทคนิคการทำ optimization ที่ใช้สำหรับปัญหาที่มี objective function และ constraints เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น (linear function) โดยที่สมการของ constraints จะอยู่ในรูปที่เป็น equalities constraints หรือ inequalities constraints ในการใช้ linear programming สำหรับการทำ optimization เริ่มมีการคิดค้นขึ้นในปี ค.ศ.1930 โดยนักเศรษฐศาสตร์คนหนึ่ง ขณะที่กำลังหาวิธีที่สามารถแบ่ง resources ได้เหมาะสมที่สุด และในระหว่างสงครามโลกครั้งที่ 2 กองทัพอากาศของสหรัฐอเมริกาพยายามหา resources ที่มีความสมบูรณ์มากที่สุด โดยการใช้วิธี linear programming ซึ่ง George B. Dantzig สมาชิกคนหนึ่งในกองทัพอากาศได้คิดค้นวิธีในการหาคำตอบสำหรับปัญหาที่เป็น linear programming เรียกว่า simplex method ได้ในปี ค.ศ.1974 วิธีนี้กลายมาเป็นสิ่งสำคัญที่ช่วยให้มีการใช้ linear programming มากขึ้น จากนั้นได้มีการพัฒนาทฤษฎีของ linear programming เพื่อนำไปประยุกต์ใช้ในงานต่างๆ และงานส่วนใหญ่ได้มีการพัฒนาทฤษฎี duality ของ linear programming โดย Kuhn และ Tucker สำหรับงานที่เกี่ยวข้องกับทางด้านอุตสาหกรรมได้มีการพัฒนาโดย Charnes และ Cooper

ถึงแม้ว่าในปัจจุบันได้มีการพัฒนาวิธีต่างๆ สำหรับแก้ปัญหา linear programming แต่ว่า simplex method ยังคงเป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพและนิยมใช้กันมากที่สุดสำหรับการแก้ปัญหาทั่วไปของ linear programming และสำหรับวิธีอื่นๆ เช่น Karmarkar's method ถูกพัฒนาขึ้นในปี ค.ศ.1984 ซึ่งได้แสดงให้เห็นว่าวิธีของ Karmarkar's method มีความเร็วในการแก้ปัญหาเท่ากับการใช้ simplex algorithm ของ Dantzig

ในบทนี้จะนำเสนอวิธีการทำ optimization ที่เรียกว่า linear programming โดยที่ objective function และ constraints เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น (linear functions) สาเหตุที่ว่าทำไมถึงต้องมีการศึกษาถึงวิธี linear programming ทั้งที่ปัญหาที่เกิดขึ้นส่วนใหญ่นั้นจะเป็น nonlinear สาเหตุนั้นเป็นเพราะว่า หลักการของ linear programming สามารถอธิบายถึงเรื่องของการทำ optimization ให้เข้าใจได้ง่าย แต่เหตุผลสำคัญที่ต้องศึกษาถึงวิธี linear programming คือ ปัญหาทางด้าน nonlinear บางปัญหาสามารถทำการ linearization หรือการทำให้อยู่ในรูปแบบที่เป็นเชิงเส้นได้ เพื่อให้ตรงตามรูปแบบของการทำ linear programming ได้ หมายความว่า การใช้วิธี linear programming สามารถหาคำตอบของปัญหาที่เป็น nonlinear ในการทำ optimization ได้

2.1 การประยุกต์ใช้ Linear Programming

ในปัจจุบันมีการประยุกต์ใช้ linear programming กันอย่างกว้างขวาง ดังนั้นจะขอกล่าวถึงการประยุกต์ใช้ linear programming ที่จำเป็นและสำคัญ ยกตัวอย่างเช่น การประยุกต์ใช้ในโรงงานอุตสาหกรรมจำพวกปิโตรเลียม โดยทั่วไปแล้วโรงกลั่นน้ำมัน จะมีการซื้อน้ำมันดิบจากแหล่งต่างๆ ที่มีองค์ประกอบและราคาของน้ำมันแตกต่างกัน ซึ่งมีผลทำให้ผลผลิตที่ได้แตกต่างกันด้วย เช่น น้ำมันสำหรับเครื่องบิน, น้ำมันดีเซล และน้ำมันเบนซิน ที่มีคุณภาพแตกต่างกัน ดังนั้นเงื่อนไขในการเลือกน้ำมันดิบของผู้จัดจำหน่าย คือ คุณภาพของน้ำมันดิบ, ส่วนผสมของน้ำมันดิบ เป็นต้น

สำหรับอุตสาหกรรมอาหาร มีการใช้ linear programming ในการหาเส้นทางการส่งผลผลิตต่างๆ แยกไปตามโรงเก็บสินค้าที่มีความเหมาะสม สำหรับอุตสาหกรรมเหล็กและเหล็กกล้า มีการใช้ linear programming ในการเลือกประเภทของผลผลิตที่ได้จากโรงงานอัดแผ่นโลหะที่ให้กำไรมากที่สุด สำหรับโรงงานที่ทำเกี่ยวกับเครื่องใช้จำพวกโลหะ มีการใช้ linear programming ในการเลือกซื้อชิ้นส่วนที่นำสร้างผลิตภัณฑ์ และสำหรับโรงงานกระดาษ จะมีการใช้ linear programming ในการลดปริมาณกระดาษที่สูญเสียไป เป็นต้น

2.2 รูปแบบกำหนดการเชิงเส้น (Linear Programming Model)

Linear programming (LP) model จะประกอบไปด้วย 2 ฟังก์ชันด้วยกัน คือ objective function และ constraints โดยที่การพิจารณาปัญหาของระบบจะมีอยู่ทั้งหมด 2 แบบด้วยกัน คือ การพิจารณาปัญหาในการหาค่าสูงสุด (maximization problem) และการพิจารณาปัญหาในการหาค่าน้อยสุด (minimization problem) โดยมีรูปแบบสมการของปัญหาทั้ง 2 แบบ ดังนี้

2.2.1 Maximization problem

Objective function $c^T x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n$

ที่สอดคล้องกับ constraints

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_n \end{array}\right\} \qquad (Ax \le b)$$

$$x_i \ge 0, \;\; i = 1,2,...,n$$

จะได้แบบฟอร์มทั่วไปของปัญหาในการหาค่าสูงสุด คือ

Maximize $c^T x$

Subject to: $Ax \le b$

$x \ge 0$

2.2.2 Minimization problem

Objective function $y^T b = y_1 b_1 + y_2 b_2 + ... + y_m b_m$

ที่สอดคล้องกับ constraints

$$\left.\begin{aligned} y_1 a_{11} + y_2 a_{21} + \cdots + y_m a_{m1} &\ge c_1 \\ y_1 a_{12} + y_2 a_{22} + \cdots + y_m a_{m2} &\ge c_2 \\ &\vdots \\ y_1 a_{1n} + y_2 a_{2n} + \cdots + y_m a_{mn} &\ge c_n \end{aligned}\right\} \qquad (y^T A \ge c^T)$$

$$y_i \ge 0, \qquad i = 1,2,...,n$$

จะได้แบบฟอร์มทั่วไปของปัญหาในการหาค่าต่ำสุด คือ

Minimize $y^T b$

Subject to: $y^T A \ge c^T$

$y \ge 0$

2.3 การหาค่าเหมาะสมที่สุดด้วยวิธีกราฟ (Graphical method)

การทำ optimization ด้วยวิธี graphical method คือการหาค่า maximum หรือ minimum จากกราฟที่อยู่ภายใต้ขอบเขตของ constraints ทั้งหมด และพื้นที่ที่อยู่ภายใต้เงื่อนไขของ constraints นั้นจะเรียกว่า convex area และคำตอบที่ได้ของ objective function จะอยู่บนจุดตัดต่างๆ ของ convex area โดยขั้นตอนการทำ optimization ด้วยวิธี graphical method มีดังนี้

1) ทำการสร้างกราฟความสัมพันธ์ของสองตัวแปรในระบบที่ต้องการหาค่า optimal
2) เปลี่ยนจากอสมการใน constraint ให้เป็นสมการเชิงเส้น แล้ววาดเส้นตรงที่ได้ลงในกราฟ
3) พิจารณาพื้นที่ที่เราสนใจในแต่ละอสมการใน constraint แล้วนำพื้นที่ที่ได้มาซ้อนทับ (intersection) กัน ซึ่งจะทำให้เกิดพื้นที่ปิด (convex area)
4) หาจุดตัดที่เกิดขึ้นทั้งหมดใน convex area ที่ได้
5) หาค่าของ objective function จากจุดตัดทั้งหมด เพื่อหาค่าที่จะ optimal ปัญหานี้

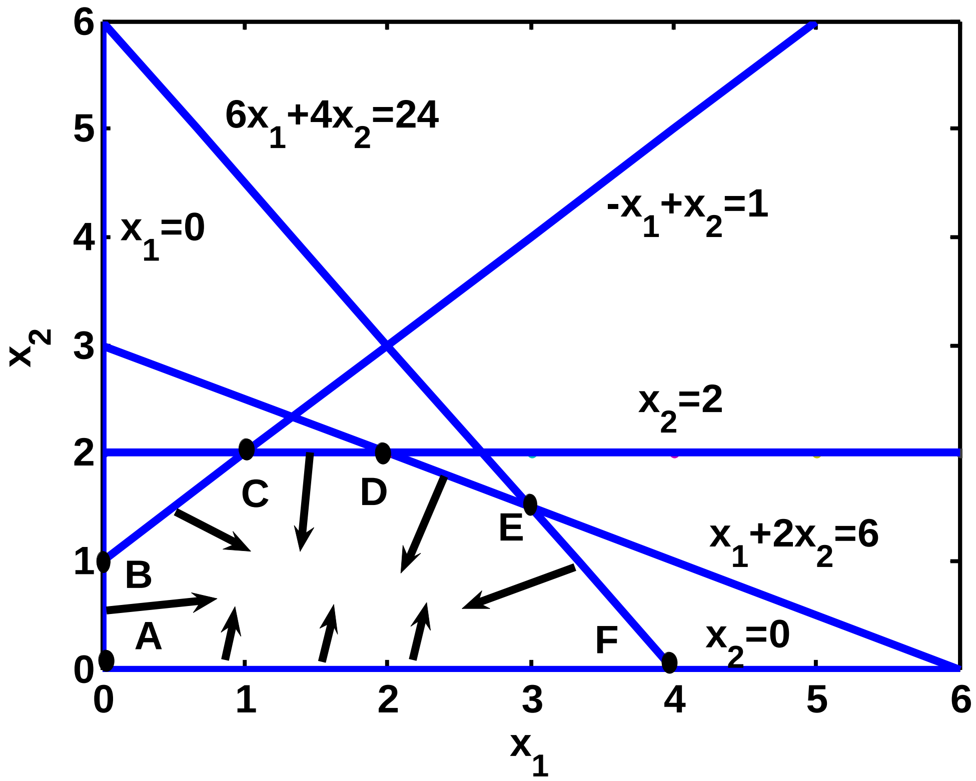
การทำ optimization ด้วยวิธี graphical method มีข้อจำกัดอยู่ว่า ตัวแปรของ objective function ควรมีเพียง 2 ตัวแปรเท่านั้น เพื่อให้สามารถมองเห็นขอบเขตของบริเวณคำตอบที่เป็นไปได้ (feasible region)

ตัวอย่างที่ 2.1 Maximize $z = 5x_1 + 4x_2$

ที่สอดคล้องกับ constraints:

$$
\begin{aligned}
&6x_1 + 4x_2 \le 24 && (1)\\
&x_1 + 2x_2 \le 6 && (2)\\
&-x_1 + x_2 \le 1 && (3)\\
&x_2 \le 2 && (4)\\
&x_1 \ge 0 && (5)\\
&x_2 \ge 0 && (6)
\end{aligned}
$$

Solution วิธีการหาค่าจุดสูงสุดแบบ graphical method เริ่มจากการแปลง constraint ต่างๆ ให้เป็นสมการเส้นตรง แล้วจึงวาดกราฟของสมการเส้นตรงดังรูป



จากรูป เมื่อเราพิจารณา constraint ที่ (1) $6x_1 + 4x_2 \le 24$ จะเห็นได้ว่าค่าต่างๆที่สอดคล้องกับสมการนั้น อยู่ทางด้านซ้ายของสมการเส้นตรง $6x_1 + 4x_2 = 24$ ดังนั้นเราจึงเลือกพิจารณาเฉพาะพื้นที่ทางด้านซ้ายของเส้นตรง

สำหรับ constraint ที่ (2) $x_1 + 2x_2 \le 6$ จะเห็นได้ว่าค่าต่างๆที่สอดคล้องกับสมการนั้น อยู่ทางด้านซ้ายของสมการเส้นตรง $x_1 + 2x_2 = 6$ ดังนั้นเราจึงเลือกพิจารณาเฉพาะพื้นที่ทางด้านซ้ายของเส้นตรง

สำหรับ constraint ที่ (3) $-x_1 + x_2 \le 1$ จะเห็นได้ว่าค่าต่างๆที่สอดคล้องกับสมการนั้น อยู่ทางด้านขวาของสมการเส้นตรง $-x_1 + x_2 = 1$ ดังนั้นเราจึงเลือกพิจารณาเฉพาะพื้นที่ทางด้านขวาของเส้นตรง

สำหรับ constraint ที่ (4) $x_2 \le 2$ จะเห็นได้ว่าค่าต่างๆที่สอดคล้องกับอสมการนั้น อยู่ทางด้านล่างของสมการเส้นตรง $x_2 = 2$ ดังนั้นเราจึงเลือกพิจารณาเฉพาะพื้นที่ทางด้านล่างของเส้นตรง

สำหรับ constraint ที่ (5) $x_1 \ge 0$ จะเห็นได้ว่าค่าต่างๆที่สอดคล้องกับอสมการนั้น อยู่ทางด้านขวาของสมการเส้นตรง $x_1 = 0$ ดังนั้นเราจึงเลือกพิจารณาเฉพาะพื้นที่ทางด้านขวาของเส้นตรง

สำหรับ constraint ที่ (6) $x_2 \ge 0$ จะเห็นได้ว่าค่าต่างๆที่สอดคล้องกับอสมการนั้น อยู่ทางด้านบนของสมการเส้นตรง $x_2 = 0$ ดังนั้นเราจึงเลือกพิจารณาเฉพาะพื้นที่ทางด้านบนของเส้นตรง

เมื่อเรานำพื้นที่ทั้งหมดของแต่ละ constraint มาซ้อนทับกัน (intersection) จะทำให้เกิดพื้นที่ปิด (convex area) ขึ้น ซึ่งเป็นพื้นที่ในกรอบ ABCDEF โดยเราจะนำจุดตัด ABCDEF เหล่านี้ไปแทนค่าใน objective function เพื่อหาค่าสูงสุด

จุด A มี co-ordinate (0,0) ทำให้เกิดค่า cost เป็น $z = 5\times 0 + 4\times 0 = 0$

จุด B มี co-ordinate (0,1) ทำให้เกิดค่า cost เป็น $z = 5\times 0 + 4\times 1 = 4$

จุด C มี co-ordinate (1,2) ทำให้เกิดค่า cost เป็น $z = 5\times 1 + 4\times 2 = 13$

จุด D มี co-ordinate (2,2) ทำให้เกิดค่า cost เป็น $z = 5\times 2 + 4\times 2 = 18$

จุด E มี co-ordinate (3,1.5) ทำให้เกิดค่า cost เป็น $z = 5\times 3 + 4\times 1.5 = 21$

จุด F มี co-ordinate (4,0) ทำให้เกิดค่า cost เป็น $z = 5\times 4 + 4\times 0 = 20$

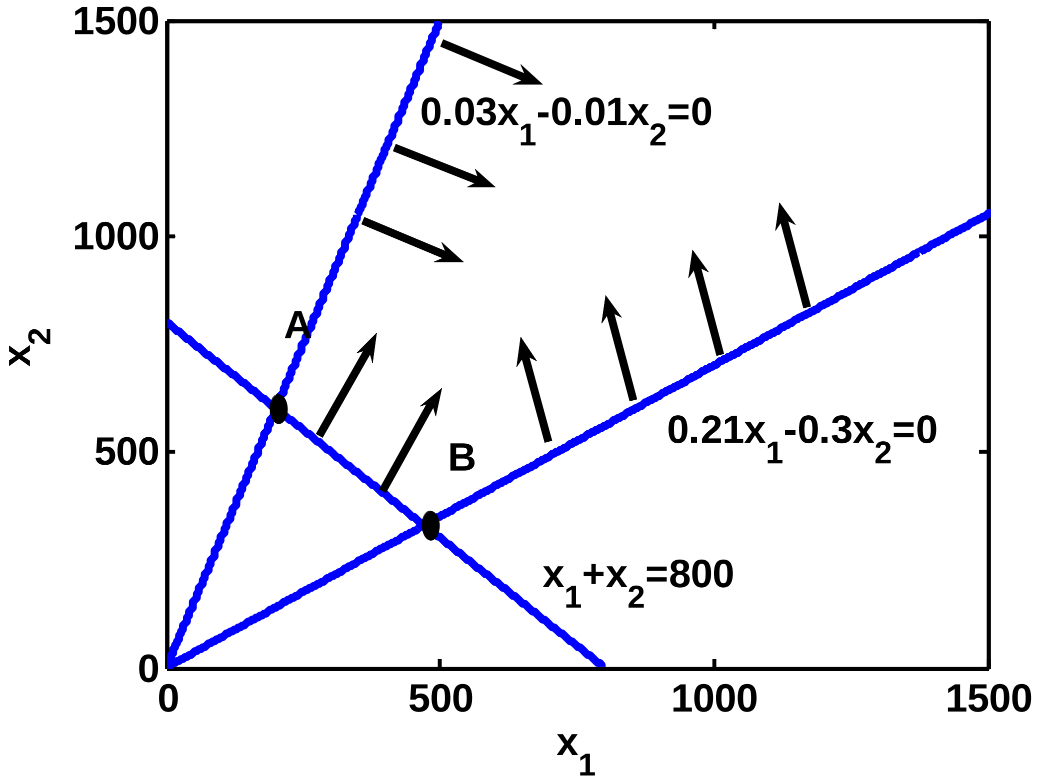
จะเห็นได้ว่าจุด E เป็นจุดตัดของ convex area ที่ทำให้เกิดจุดสูงสุด ดังนั้นค่า $x_1 = 3$ และ $x_2 = 1.5$ จะทำให้เกิดค่า cost สูงสุด ซึ่งมีค่าเท่ากับ 21

ตัวอย่างที่ 2.2 Minimization $z = 3x_1 + 9x_2$

ที่สอดคล้องกับ constraints:

$$0.03x_1 - 0.01x_2 \ge 0 \qquad (1)$$
$$0.21x_1 - 0.3x_2 \le 0 \qquad (2)$$
$$x_1 + x_2 \ge 800 \qquad (3)$$
$$x_1 \ge 0 \qquad (4)$$
$$x_2 \ge 0 \qquad (5)$$

Solution วิธีการหาค่าจุดสูงสุดแบบ graphical method เริ่มจากการแปลง constraint ต่างๆ ให้เป็นสมการเส้นตรง แล้วจึงวาดกราฟของสมการเส้นตรงดังรูป



จากรูป เมื่อเราพิจารณา constraint ที่ (1) $0.03x_1 - 0.01x_2 \geq 0$ จะเห็นได้ว่าค่าต่างๆที่สอดคล้องกับอสมการนั้น อยู่ทางด้านขวาของสมการเส้นตรง $0.03x_1 - 0.01x_2 = 0$ ดังนั้นเราจึงเลือกพิจารณาเฉพาะพื้นที่ทางด้านขวาของเส้นตรง

สำหรับ constraint ที่ (2) $0.21x_1 - 0.3x_2 \leq 0$ จะเห็นได้ว่าค่าต่างๆที่สอดคล้องกับอสมการนั้น อยู่ทางด้านซ้ายของสมการเส้นตรง $0.21x_1 - 0.3x_2 = 0$ ดังนั้นเราจึงเลือกพิจารณาเฉพาะพื้นที่ทางด้านซ้ายของเส้นตรง

สำหรับ constraint ที่ (3) $x_1 + x_2 \geq 800$ จะเห็นได้ว่าค่าต่างๆที่สอดคล้องกับอสมการนั้น อยู่ทางด้านขวาของสมการเส้นตรง $x_1 + x_2 = 800$ ดังนั้นเราจึงเลือกพิจารณาเฉพาะพื้นที่ทางด้านขวาของเส้นตรง

สำหรับ constraint ที่ (4) $x_1 \geq 0$ จะเห็นได้ว่าค่าต่างๆที่สอดคล้องกับอสมการนั้น อยู่ทางด้านขวาของสมการเส้นตรง $x_1 = 0$ ดังนั้นเราจึงเลือกพิจารณาเฉพาะพื้นที่ทางด้านขวาของเส้นตรง

สำหรับ constraint ที่ (5) $x_2 \geq 0$ จะเห็นได้ว่าค่าต่างๆที่สอดคล้องกับอสมการนั้น อยู่ทางด้านบนของสมการเส้นตรง $x_2 = 0$ ดังนั้นเราจึงเลือกพิจารณาเฉพาะพื้นที่ทางด้านบนของเส้นตรง

เมื่อเรานำพื้นที่ทั้งหมดของแต่ละ constraint มาซ้อนทับกัน (intersection) จะทำให้เกิดพื้นที่ในบริเวณลูกศรชี้ โดยเราจะนำจุดตัด A และ B ที่เป็นจุดตัดที่เกิดขึ้นภายในพื้นที่ที่เราพิจารณามาแทนค่าใน objective function เพื่อหาค่าต่ำสุด

จุด A มี co-ordinate (200,600) ทำให้เกิดค่า cost เป็น $z = 0.3 \times 200 + 0.9 \times 600 = 6{,}000$

จุด B มี co-ordinate (470.6,329.4) ทำให้เกิดค่า cost เป็น $z = 4{,}376.4$

จะเห็นได้ว่าจุด B เป็นจุดตัดที่ทำให้เกิดจุดต่ำสุด ดังนั้นค่า $x_1 = 470.6$ และ $x_2 = 329.4$ จะทำให้เกิดค่า cost ต่ำสุด ซึ่งมีค่าเท่ากับ 4,376.4

2.4. Pivot Operation

Pivot operation เป็นวิธีการทางคณิตศาสตร์อย่างหนึ่งที่สามารถนำมาใช้ในการแก้ปัญหา minimum problem และ maximum problem ใน linear programming ได้ โดยหลักการทั่วไปของการทำ pivot operation เราจะเริ่มจากการเขียนสมการต่างๆให้อยู่ในรูปของ matrix โดยให้ตัวแปรอยู่ด้านซ้าย และค่าคงที่ของสมการอยู่ด้านขวาดังสมการ

$$\begin{array}{ccccccc} y_1 a_{11} & + \cdots + & y_i a_{i1} & + \cdots + & y_m a_{m1} & = & s_1 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ y_1 a_{1j} & + \cdots + & y_i a_{ij} & + \cdots + & y_m a_{mj} & = & s_j \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ y_1 a_{1n} & + \cdots + & y_i a_{in} & + \cdots + & y_m a_{mn} & = & s_n \end{array} \tag{2.1}$$

หลังจากนั้นเมื่อเราทำการ pivot ที่ entry a_{ij} สมการเมทริกซ์จะมีหน้าตาเปลี่ยนแปลงไปเป็น

$$\begin{array}{ccccccc} y_1 \hat{a}_{11} & + \cdots + & s_j \hat{a}_{i1} & + \cdots + & y_m \hat{a}_{m1} & = & s_1 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ y_1 \hat{a}_{1j} & + \cdots + & s_j \hat{a}_{ij} & + \cdots + & y_m \hat{a}_{mj} & = & y_i \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ y_1 \hat{a}_{1n} & + \cdots + & s_j \hat{a}_{in} & + \cdots + & y_m \hat{a}_{mn} & = & s_n \end{array} \tag{2.2}$$

วิธีการ pivot จากสมการที่ (2.1) ไปเป็นสมการที่ (2.2) สามารถทำได้โดยใช้ ตาราง pivot (pivot table) ดังนี้

$$\begin{array}{c|ccccc} & s_1 & \cdots & s_j & \cdots & s_n \\ \hline y_1 & a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_i & a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_m & a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|ccccc} & s_1 & \cdots & y_i & \cdots & s_n \\ \hline y_1 & \hat{a}_{11} & \cdots & \hat{a}_{1j} & \cdots & \hat{a}_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ s_j & \hat{a}_{i1} & \cdots & \hat{a}_{ij} & \cdots & \hat{a}_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_m & \hat{a}_{m1} & \cdots & \hat{a}_{mj} & \cdots & \hat{a}_{mn} \end{array}$$

โดยที่ $\hat{a}_{ij} = \dfrac{1}{a_{ij}}$

$$\hat{a}_{hj} = -\frac{a_{hj}}{a_{ij}} \quad \text{for } h \neq i$$

$$\hat{a}_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{ij}} \quad \text{for } k \neq j$$

$$\hat{a}_{hk} = a_{hk} - \frac{a_{ik}a_{hj}}{a_{ij}} \quad \text{for } k \neq j \text{ and } h \neq i$$

จะเห็นได้ว่าเมื่อเราทำการ pivot ที่ entry a_{ij} ค่าตัวแปรในแถวและหลักของ a_{ij} จะสลับตำแหน่งกันในตารางใหม่ที่ถูกสร้างขึ้น กล่าวคือ y_i ถูกสลับตำแหน่งกับ s_j และค่าสัมประสิทธิ์ต่างๆในตารางใหม่ก็จะเปลี่ยนไป โดยค่าในตารางใหม่ในตำแหน่งของตัว pivot a_{ij} นั้น จะมีค่าเท่ากับ หนึ่งส่วนค่า pivot ในตารางเดิม ($\hat{a}_{ij} = \dfrac{1}{a_{ij}}$) และ entry ที่อยู่แถวเดียวกับตัว pivot ในตารางใหม่จะมีค่าเท่ากับ entry ค่านั้นส่วนตัว pivot ($\hat{a}_{ik} = \dfrac{a_{ik}}{a_{ij}}$) ในขณะที่ entry ที่อยู่หลักเดียวกับตัว pivot ในตารางใหม่จะมีค่าเท่ากับ – (ลบ) entry ค่านั้นส่วนตัว pivot ($\hat{a}_{hj} = -\dfrac{a_{hj}}{a_{ij}}$) ส่วน entry ตัวอื่นๆ ที่ไม่ได้อยู่ทั้งในหลักและแถวเดียวกับตัว pivot จะมีค่าเท่ากับ entry ค่านั้น ลบด้วยผลคูณของ entry ที่ตัดกันระหว่างตำแหน่งของ entry นั้นกับตัว pivot ส่วนด้วยตัว pivot ($\hat{a}_{hk} = a_{hk} - \dfrac{a_{ik}a_{hj}}{a_{ij}}$)

ตัวอย่างที่ 2.5 หา inverse matrix ของเมทริกซ์ A โดยใช้ pivot operation

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>Solution</u>

ขั้นแรก เราจะทำการเขียน matrix A ลงใน pivot table ก่อน ซึ่งจะได้ตารางทางด้านซ้าย และหลังจากนั้นทำการ pivot ที่ค่า entry เท่ากับ 3 เพื่อทำการสลับตัวแปรแถวที่ 1 กับหลักที่ 1 พร้อมทั้งคำนวณหาค่า entry ในตำแหน่งต่างๆ ดังแสดง

	s_1	s_2	s_3
y_1	3	1	5
y_2	2	-3	1
y_3	0	3	1

$\longrightarrow$

	y_1	s_2	s_3
s_1	1/3	1/3	5/3
y_2	-2/3	-11/3	-7/3
y_3	0	3	1

ขั้นตอนถัดมา ทำการ pivot ที่ entry เท่ากับ -11/3 เพื่อสลับตัวแปรแถวที่ 2 กับหลักที่ 2 พร้อมทั้งคำนวณหาค่า entry ในตำแหน่งต่างๆ ดังแสดง

	y_1	s_2	s_3
s_1	1/3	1/3	5/3
y_2	-2/3	-11/3	-7/3
y_3	0	3	1

$\longrightarrow$

	y_1	y_2	s_3
s_1	9/33	1/11	48/33
s_2	2/11	-3/11	7/11
y_3	-6/11	9/11	-10/11

ขั้นตอนสุดท้าย ทำการ pivot ที่ entry เท่ากับ -10/11 เพื่อสลับตัวแปรแถวที่ 3 กับหลักที่ 3 พร้อมทั้งคำนวณหาค่า entry ในตำแหน่งต่างๆ ดังแสดง

	y_1	y_2	s_3
s_1	9/33	1/11	48/33
s_2	2/11	-3/11	7/11
y_3	-6/11	9/11	-10/11

$\longrightarrow$

	y_1	y_2	y_3
s_1	-0.6	1.4	1.6
s_2	-0.2	0.3	0.7
s_3	0.6	-0.9	-1.1

จะเห็นได้ว่าตอนนี้ตัวแปรแถวและหลักถูกสลับตำแหน่งกันหมด กล่าวคือจากเดิมที่ ตัวแปร s_1, s_2, s_3 เคยเป็นตัวแปรในแต่ละหลัก ก็เปลี่ยนมาเป็นตัวแปรในแต่ละแถวแทน เช่นเดียวกับตัวแปร y_1, y_2, y_3 เดิมที่เคยเป็นตัวแปรในแต่ละแถวก็เปลี่ยนมาเป็นตัวแปรในแต่ละหลักแทน ดังนั้นจะเห็นได้ว่าตอนนี้เกิดการทำ inverse matrix ขึ้น หรือเราจะเขียนได้ว่า

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -0.6 & 1.4 & 1.6 \\ -0.2 & 0.3 & 0.7 \\ 0.6 & -0.9 & -1.1 \end{bmatrix}$$

1.4 **การหาค่าเหมาะสมที่สุดด้วยวิธี** Simplex method

Simplex method เป็นวิธีการทำ optimization ที่มีความเป็นระบบและมีประสิทธิภาพวิธีหนึ่ง วิธี simplex method ถูกคิดค้นในปี ค.ศ.1947 โดย George Dantzig โดยหลักการของ simplex method คือ การย้าย objective function จากคำตอบที่เป็นไปได้ (feasible solution) ตัวหนึ่งไปยังคำตอบอีกตัวหนึ่งที่เป็นคำตอบที่ดีกว่า โดยอาศัยทฤษฎีของเมทริกซ์ วิธีของ simplex method เป็นวิธีที่ค่อนข้างมีประสิทธิภาพ เนื่องจากไม่มีการเกี่ยวข้องกับคำตอบที่เป็นไปได้ทั้งหมด วิธีการทำ simplex method จะมีอยู่ด้วยกัน 2 วิธี คือ

1. การใช้ Slack variable
2. การใช้ Pivot operation

วิธีการทำ simplex method ทั้ง 2 วิธี จะอยู่บนพื้นฐานทางทฤษฎีของเมทริกซ์เดียวกัน กล่าวคือใช้หลักการทางเมทริกซ์เดียวกัน แต่แตกต่างกันที่วิธีหาคำตอบของ objective function

2.5.1 **การทำ** Simplex Method **โดยใช้** Slack Variable

Maximization problem

ปัญหาของการทำ maximization ถูกเขียนเป็นสมการโดยทั่วไปได้เป็น

"ทำการหาค่าของ x ที่ทำให้เกิดจุด maximum ใน objective function $c^T x$ ที่สอดคล้องกับ constraint: $Ax \le b$, $x \ge 0$"

ซึ่งจะเห็นได้ว่า constraint ต่างๆนั้นยังไม่เป็นสมการเชิงเส้น ซึ่งถ้าเราจะทำการเปลี่ยน constraint ให้เป็นสมการเชิงเส้น เราจะต้องเพิ่มค่าตัวแปรเข้าไปในสมการ โดยเขียนใหม่ได้เป็น

$$Ax + u = b$$

x_1	x_2	$\cdots$	x_n	u_1	u_2	$\cdots$	u_m	Solution constant
a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	1	0	$\cdots$	0	b_1
a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	0	1	$\cdots$	0	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	0	0	$\cdots$	1	b_m
$-c_1$	$-c_2$	$\cdots$	$-c_n$	0	0	$\cdots$	0	0

Simplex Tableau ของ maximization problem

จะเห็นได้ว่าแถวสุดท้ายของตารางนั้นได้มาจากการเขียน objective function $z = c^T x$ ให้เป็น $z - c^T x = 0$ แล้วนำสมการที่ได้ไปจัดเรียงในแถวสุดท้ายนั่นเอง

หลังจากที่เราได้ Simplex Tableau ของ maximization problem แล้ว เราจะทำการหาคำตอบของ maximization problem โดยใช้ simplex method ในวิธี slack variable ได้ดังนี้

1. สร้าง simplex tableau ดังอธิบายข้างต้น

2. **<u>เลือก Pivot column</u>**: หา column ที่ทำให้เกิด**ค่าลบมากที่สุด**ใน objective function row แล้วกำหนดให้เป็น pivot column และเราจะเรียกหลักนั้นว่าเป็น column j โดยที่ ถ้าค่าในหลักสองหลักมีค่าลบมากสุดที่เท่ากัน (เกิดกรณี tie) เราสามารถทำการ pivot ที่หลักใดก่อนก็ได้
3. **<u>เลือก Pivot row</u>**: สำหรับการเลือก pivot row นั้น เราทำได้โดยหาค่าผลหารระหว่างค่าในหลักสุดท้ายกับค่าที่อยู่ใน pivot column ของทุกแถว โดยเวลาหาผลหารนั้น เราจะไม่นำเครื่องหมายมาคิด หลังจากนั้นทำการ pivot ในแถวที่มี**ค่าบวกน้อยที่สุด** และเรียกแถวนั้นว่าเป็น row i ทั้งนี้เราจะเรียก entry ในแถว i หลัก j ว่าเป็น ตัว pivot โดยที่ถ้าค่าในแถวสองแถวมีค่าบวกน้อยสุดที่เท่ากัน (เกิดกรณี tie) เราสามารถทำการ pivot ที่แถวใดก่อนก็ได้
4. ทำการอัพเดท simplex tableau จากตารางแรก และกำหนดให้ค่าของตำแหน่งที่เป็นตัว pivot มีค่าเป็นหนึ่ง และ entry ตัวอื่นๆ ที่อยู่ใน pivot column มีค่าเป็นศูนย์ ทั้งนี้จะไม่มีการสลับตำแหน่งของตัวแปร
5. ตรวจสอบค่าใน objective function row ว่ามีหลักใดที่ยังเป็นลบอยู่ ถ้ามีค่าในหลักใดหลักหนึ่งที่ยังเป็นลบอยู่ (ไม่รวมถึงหลักของ slack variable) ให้ทำซ้ำตั้งแต่ข้อ 3 จนกระทั่งค่าใน objective function row ทั้งหมดเป็นบวกแล้ว ค่าของ solution constant ใน objective function row คือคำตอบของ objective function

<u>Minimization problem</u>

ปัญหาของการทำ minimization ถูกเขียนเป็นสมการโดยทั่วไปได้เป็น

"ทำการหาค่าของ y ที่ทำให้เกิดจุด minimum ใน objective function $y^T b$ ที่สอดคล้องกับ constraint: $y^T A \geq c^T$, $y \geq 0$ "

ซึ่งจะเห็นได้ว่า constraint ต่างๆนั้นยังไม่เป็นสมการเชิงเส้น ซึ่งถ้าเราจะทำการเปลี่ยน constraint ให้เป็นสมการเชิงเส้น เราจะต้องเพิ่มค่าตัวแปรเข้าไปในสมการ โดยเขียนใหม่ได้เป็น

$$-y^T A + s^T = -c^T$$

y_1	y_2	$\ldots$	y_n	s_1	s_2	$\ldots$	s_m	Solution constant
$-a_{11}$	$-a_{12}$	$\ldots$	$-a_{1n}$	1	0	$\ldots$	0	$-c_1$
$-a_{21}$	$-a_{22}$	$\ldots$	$-a_{2n}$	0	1	$\ldots$	0	$-c_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$-a_{m1}$	$-a_{m2}$	$\ldots$	$-a_{mn}$	0	0	$\ldots$	1	$-c_m$
$-b_1$	$-b_2$	$\ldots$	$-b_n$	0	0	$\ldots$	0	0

Simplex Tableau ของ minimization problem

จะเห็นได้ว่าแถวสุดท้ายของตารางนั้นได้มาจากการเขียน objective function $z = y^T b$ ให้เป็น $z - y^T b = 0$ แล้วนำสมการที่ได้ไปจัดเรียงในแถวสุดท้ายนั่นเอง

หลังจากที่เราได้ Simplex Tableau ของ minimization problem แล้ว เราจะทำการหาคำตอบของ minimization problem โดยใช้ simplex method โดยใช้หลักการเลือกตัว pivot คล้ายกับกรณีของ maximization problem กล่าวคือ เราสามารถใช้ simplex method ในวิธี slack variable ได้ดังนี้

1. สร้างตาราง simplex tableau ดังอธิบายข้างต้น
2. **เลือก Pivot column**: หา column ที่ทำให้เกิด**ค่าลบน้อยที่สุด**ใน objective function row แล้วกำหนดให้เป็น pivot column และเราจะเรียกหลักนั้นว่าเป็น column j โดยที่ ถ้าค่าในหลักสองหลักมีค่าลบน้อยสุดที่เท่ากัน (เกิดกรณี tie) เราสามารถทำการ pivot ที่หลักใดก่อนก็ได้
3. **เลือก Pivot row**: สำหรับการเลือก pivot row นั้น เราทำได้โดยหาค่าผลหารระหว่างค่าในหลักสุดท้ายกับค่าที่อยู่ใน pivot column ของทุกแถว โดยเวลาหาผลหารนั้น เราจะไม่นำเครื่องหมายมาคิด หลังจากนั้นทำการ pivot ในแถวที่มี**ค่าบวกน้อยที่สุด** และเรียกแถวนั้นว่าเป็น row i ทั้งนี้เราจะเรียก entry ในแถว i หลัก j ว่าเป็น ตัว pivot โดยที่ถ้าค่าในแถวสองแถวมีค่าบวกน้อยสุดที่เท่ากัน (เกิดกรณี tie) เราสามารถทำการ pivot ที่แถวใดก่อนก็ได้
4. ทำการอัพเดท simplex tableau จากตารางแรก และกำหนดให้ค่าของตำแหน่งที่เป็นตัว pivot มีค่าเป็นหนึ่ง และ entry ตัวอื่นๆ ที่อยู่ใน pivot column มีค่าเป็นศูนย์ ทั้งนี้จะไม่มีการสลับตำแหน่งของตัวแปร
5. ตรวจสอบค่าใน objective function row ว่ามีหลักใดที่ยังเป็นลบอยู่ (ไม่รวมถึงหลักของ slack variable) ถ้ามีค่าในหลักใดหลักหนึ่งที่ยังเป็นลบอยู่ ให้ทำซ้ำตั้งแต่ข้อ 3 จนกระทั่งค่าใน objective function row ทั้งหมดเป็นบวกแล้ว ค่าของ solution constant ใน objective function row คือคำตอบของ objective function

ตัวอย่างที่ 2.6 หาค่าสูงสุดของฟังก์ชันที่กำหนด โดยใช้วิธี slack variable

Maximize the function $Z = 3x_1 + 5x_2$

ที่สอดคล้องกับ constraint : $x_1 \le 4$

$$2x_2 \le 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \le 18,\ x_1, x_2 \ge 0$$

<u>Solution</u>

1. แปลง constraints ให้อยู่ในรูปของ linear equation โดยการเพิ่ม slack variable u_1, u_2, u_3 จะได้

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad + u_1 \quad\quad &= 4 \\ 2x_2 \quad\quad + u_2 \quad &= 12 \\ 3x_1 + 2x_2 \quad\quad\quad + u_3 &= 18 \end{aligned}$$

2. เขียน initial simplex tableau

x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	Solution constant
1	0	1	0	0	4
0	2	0	1	0	12
3	2	0	0	1	18
-3	-5	0	0	0	0

3. โจทย์ข้อนี้เป็นการหาค่า maximum ดังนั้น เราสามารถหา pivot column ได้จากการเลือกค่าใน objective function row ที่มีค่าเป็นลบมากที่สุด คือ -5 จากนั้น หาค่า pivot element จากผลหารระหว่างค่า Solution Constant กับค่าใน pivot column ซึ่งค่าที่เป็นบวกน้อยที่สุด คือ 12/2 = 6 ดังนั้นจะได้ตัว pivot ดังตาราง

x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	Solution constant
1	0	1	0	0	4
0	2	0	1	0	12
3	2	0	0	1	18
-3	-5	0	0	0	0

4. ทำการอัพเดท simplex tableau โดยใช้ตัว pivot จากตารางที่แล้ว จะได้

x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	Solution constant
1	0	1	0	0	4
0	1	0	1/2	0	6
3	0	0	-1	1	6
-3	0	0	5/2	0	30

5. จะเห็นว่าค่าใน objective function row ยังมีค่าที่เป็นลบอยู่ คือ -3 ดังนั้นเริ่มทำการเลือกตัว pivot ใหม่ จะได้

x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	Solution constant
1	0	1	0	0	4
0	1	0	1/2	0	6
3	0	0	-1	1	6
-3	0	0	5/2	0	30

6. ทำการอัพเดท simplex tableau โดยใช้ตัว pivot จากตารางที่แล้ว จะได้

x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	Solution

					constant
0	0	1	1/3	-1/3	2
0	1	0	1/2	0	6
1	0	0	-1/3	1/3	2
0	0	0	3/2	1	36

7. จากตารางจะเห็นได้ว่าใน objective function row ไม่มีค่าใดเป็นลบ ดังนั้นจะได้ค่ามากสุดของฟังก์ชันนี้ คือ 36 ที่จุด $x_1 = 2$ และ $x_2 = 6$

หมายเหตุ

ถ้าเราต้องการหาค่า minimum ของตัวอย่างนี้ เราสามารถพิจารณาง่ายๆ ได้จาก Graphical method ซึ่งจะเห็นได้ว่าจุดตัดที่ทำให้เกิดค่า minimum คือ $x_1 = 0$ และ $x_2 = 0$

ตัวอย่างที่ 2.7 หาค่าสูงสุดของฟังก์ชันที่กำหนด โดยใช้วิธี slack variable

Maximize the function $Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$

ที่สอดคล้องกับ constraint : $x_1 - 2x_2 + x_3 \le 6$

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 \le 12$$

$$3x_1 + 3x_2 - x_3 \le 5, \qquad x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

Solution

1. แปลง constraints ให้อยู่ในรูปของ linear equation โดยการเพิ่ม slack variable จะได้

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + u_1 &= 6 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + u_2 &= 12 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 + u_3 &= 5 \end{aligned}$$

2. เขียน initial simplex tableau

x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	Solution constant
1	-2	1	1	0	0	6
2	4	1	0	1	0	12
3	3	-1	0	0	1	5
-2	-3	-1	0	0	0	0

3. หา pivot column โดยเลือกค่าใน objective function row ที่มีค่าเป็นลบมากที่สุด คือ -3 จากนั้น หาค่า pivot element จากผลหารระหว่างค่า Solution Constant กับค่าใน pivot column ที่ให้ค่าเป็นบวกน้อยที่สุด คือ 5/3 = 1.667 ดังนั้นจะได้

x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	Solution constant
1	-2	1	1	0	0	6
2	4	1	0	1	0	12
3	3	-1	0	0	1	5
-2	-3	-1	0	0	0	0

4. ทำการอัพเดท simplex tableau โดยใช้ตัว pivot จากตารางที่แล้ว จะได้

x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	Solution constant
3	0	1/3	1	0	2/3	28/3
-2	0	7/3	0	1	-4/3	16/3
1	1	-1/3	0	0	1/3	5/3
1	0	-2	0	0	1	5

5. จะเห็นว่าค่าใน objective function row ยังมีค่าที่เป็นลบอยู่ คือ -2 ดังนั้นเริ่มทำการหาตัว pivot ใหม่ จะได้

x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	Solution constant
3	0	1/3	1	0	2/3	28/3
-2	0	7/3	0	1	-4/3	16/3
1	1	-1/3	0	0	1/3	5/3
1	0	-2	0	0	1	5

6. ทำการอัพเดท simplex tableau โดยใช้ตัว pivot จากตารางที่แล้ว จะได้

x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	Solution constant
23/7	0	0	1	-1/7	6/7	180/21
-6/7	0	1	0	3/7	-4/7	16/7
5/7	1	0	0	1/7	1/7	17/7
-5/7	0	0	0	6/7	-1/7	67/7

7. จะเห็นว่าค่าใน objective function row ยังมีค่าที่เป็นลบอยู่ คือ -5/7 ดังนั้นเริ่มทำการหาตัว pivot ใหม่ จะได้

x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	Solution constant
23/7	0	0	1	-1/7	6/7	180/21
-6/7	0	1	0	3/7	-4/7	16/7
5/7	1	0	0	1/7	1/7	17/7
-5/7	0	0	0	6/7	-1/7	67/7

8. ทำการอัพเดท simplex tableau โดยใช้ตัว pivot จากตารางที่แล้ว จะได้

x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	Solution constant
1	0	0	7/23	-1/23	6/23	60/23
0	0	1	6/23	9/23	-8/23	104/23
0	1	0	-5/23	4/23	-1/23	13/23
0	0	0	5/23	19/23	1/23	263/23

9. จากตารางจะเห็นได้ว่าใน objective function row ไม่มีค่าใดเป็นลบ ดังนั้นจะได้ค่ามากสุดของฟังก์ชันนี้ คือ $263/23 = 11.435$ ที่จุด $x_1 = 60/23 = 2.609$, $x_2 = 13/23 = 0.565$ และ $x_3 = 104/23 = 4.522$

ตัวอย่างที่ 2.8 หาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันที่กำหนด โดยใช้วิธี slack variable

Minimize the function $z = 3x_1 + 9x_2$

ที่สอดคล้องกับ constraint : $0.03x_1 - 0.01x_2 \geq 0$

$0.21x_1 - 0.3x_2 \leq 0$

$x_1 + x_2 \geq 800$, $x_1, x_2 \geq 0$

<u>Solution</u>

1. แปลง constraints ให้อยู่ในรูปของ linear equation โดยการเพิ่ม slack variable จะได้

$$-0.03x_1 + 0.01x_2 \quad + s_1 \qquad = 0$$
$$0.21x_1 - 0.3x_2 \qquad + s_2 \qquad = 0$$
$$-x_1 - x_2 \qquad\qquad + s_3 \quad = -800$$

1. เขียน initial simplex tableau

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Solution constant
-0.03	0.01	1	0	0	0

-0.21	0.3	0	1	0	0
-1	-1	0	0	1	-800
-3	-9	0	0	0	0

2. หา pivot column โดยเลือกค่าใน objective function row ที่มีค่าเป็นลบน้อยที่สุด คือ -3 จากนั้น หาค่า pivot element จากผลหารระหว่างค่า Solution Constant กับค่าใน pivot column ที่ให้ค่าเป็นบวกน้อยที่สุด ซึ่งในกรณีนี้เกิดการ tie ใน row ที่ 1 และ 2 เนื่องจากผลหารเป็น 0 ทั้ง 2 row ดังนั้น เราสามารถเลือกทำการ pivot ที่ row ใดก็ได้ ซึ่งในที่นี้ จะเลือกทำการ pivot ที่ entry (1,1) ได้

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Solution constant
-0.03	0.01	1	0	0	0
-0.21	0.3	0	1	0	0
-1	-1	0	0	1	-800
-3	-9	0	0	0	0

3. ทำการอัพเดท simplex tableau โดยใช้ตัว pivot จากตารางที่แล้ว จะได้

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Solution constant
1	-0.33333	-33.3333	0	0	0
0	0.23	-7	1	0	0
0	-1.33333	-33.3333	0	1	-800
0	-10	-100	0	0	0

4. จะเห็นว่าค่าใน objective function row ยังมีค่าที่เป็นลบอยู่ คือ -10 และ -100 ดังนั้นเลือก pivot column ที่ตำแหน่ง -10 และหา pivot row โดยการหา pivot row นั้นจะเกิดการ tie ที่ row ที่ 1 และ row ที่ 2 โดยในที่นี้ จะเลือก row ที่ 2 เป็น pivot row จะได้

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Solution constant
1	-0.33333	-33.3333	0	0	0
0	0.23	-7	1	0	0
0	-1.33333	-33.3333	0	1	-800
0	-10	-100	0	0	0

5. ทำการอัพเดท simplex tableau โดยใช้ตัว pivot จากตารางที่แล้ว จะได้

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Solution constant
1	0	-43.4783	1.449275	0	0
0	1	-30.4348	4.347826	0	0
0	0	-73.913	5.797101	1	-800
0	0	-404.348	43.47826	0	0

6. จะเห็นว่าค่าใน objective function row ยังมีค่าที่เป็นลบอยู่ คือ -404.348 ดังนั้นเราจึงได้ pivot column ส่วน pivot row นั้น เราสามารถเลือกได้ทั้ง row 1 หรือ row 2 เนื่องจากเกิดการ tie แต่ถ้าเราทำการ pivot ที่ row 3 นั้น เราก็สามารถทำได้ ซึ่งจะได้ผลลัพธ์ออกมาได้รวดเร็วกว่า ดังนั้นจึงทำการ pivot ที่ entry (3,3)

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Solution constant
1	0	-43.4783	1.449275	0	0
0	1	-30.4348	4.347826	0	0
0	0	-73.913	5.797101	1	-800
0	0	-404.348	43.47826	0	0

7. ทำการอัพเดท simplex tableau โดยใช้ตัว pivot จากตารางที่แล้ว จะได้

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Solution constant
1	0	0	-1.96078	-0.58824	470.5882
0	1	0	1.960784	-0.41176	329.4118
0	0	1	-0.07843	-0.01353	10.82353
0	0	0	11.76471	-5.47059	4376.471

8. จากตารางจะเห็นได้ว่าใน objective function row ในหลักของตัวแปรที่เราสนใจ ไม่มีค่าใดเป็นลบ ดังนั้นจะได้ค่าน้อยสุดของฟังก์ชันนี้ คือ 4,376.471 ที่จุด $x_1 = 470.5882$ และ $x_2 = 329.4118$

2.5.2 การทำ Simplex Method โดยใช้ Pivot Operation

ในวิธีการนี้จะคล้ายกับ Simplex Method โดยใช้ Slack Variable แต่จะมีความซับซ้อนน้อยกว่า เนื่องจาก Simplex tableau นั้นจะเขียนให้อยู่ในรูปของการลดรูป ส่วนวิธีการหาค่าต่างๆนั้นจะใช้หลักการเดิม

Maximization problem

ปัญหาของการทำ maximization ถูกเขียนเป็นสมการโดยทั่วไปได้เป็น

"ทำการหาค่าของ x ที่ทำให้เกิดจุด maximum ใน objective function $c^T x$ ที่สอดคล้องกับ constraint: $Ax \le b$, $x \ge 0$ "

ซึ่งจะเห็นได้ว่า constraint ต่างๆนั้นยังไม่เป็นสมการเชิงเส้น ซึ่งถ้าเราจะทำการเปลี่ยน constraint ให้เป็นสมการเชิงเส้น เราจะต้องเพิ่มค่าตัวแปรเข้าไปในสมการ โดยเขียนใหม่ได้เป็น

$$Ax + u = b \text{ หรือ } u = b - Ax$$

โดยปัญหานี้จะสามารถเขียนใหม่ได้เป็น

"ทำการหาค่าของ x และ u ที่ทำให้เกิดจุด maximum ใน objective function $c^T x$ ที่สอดคล้องกับ constraint: $u = b - Ax$, $x \ge 0$, และ $u \ge 0$ "

ทั้งนี้เราจะเรียก ตัวแปร u นี้ว่าเป็น slack variable จาก constraint ที่จัดให้อยู่ในรูปของสมการเชิงเส้นโดยมี slack variable อยู่ด้วยนั้น เราสามารถจัดรูปแล้วนำมาเขียนลงในตารางได้เป็น

$$-u = Ax - b$$

	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	-1
$-u_1$	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	b_1
$-u_2$	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$-u_m$	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	b_m
z	$-c_1$	$-c_2$	$\cdots$	$-c_n$	0

จะเห็นได้ว่าแถวสุดท้ายของตารางนั้นได้มาจากการเขียน objective function $z = c^T x$ ให้เป็น $z - c^T x = 0$ แล้วนำสมการที่ได้ไปจัดเรียงในแถวสุดท้ายนั่นเอง โดยเราจะเรียกตารางนี้ว่าเป็น Simplex Tableau ของ maximization problem

หลังจากที่เราได้ Simplex Tableau ของ maximization problem แล้ว เราจะทำการหาคำตอบของ maximization problem โดยใช้ simplex method โดยใช้หลักการเลือกตัว pivot ได้ดังนี้

1. เขียนตาราง simplex tableau (ในที่นี้ เราสมมติ slack variable ใหม่ขึ้นมา โดย $s_1, s_2, \ldots, s_m$ มีค่าเท่ากับ $-u_1, -u_2, \ldots, -u_m$ ตามลำดับ)

	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	-1
s_1	a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1n}	b_1
s_2	a_{21}	a_{22}	$\ldots$	a_{2n}	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
s_m	a_{m1}	a_{m2}	$\ldots$	a_{mn}	b_m
	$-c_1$	$-c_2$	$\ldots$	$-c_n$	0

2. Pivot column: ในแถว objective function ให้เลือก column ที่ให้**ค่าเป็นลบที่มีขนาดมากที่สุด** โดยจะไม่พิจารณาในหลักสุดท้าย
3. Pivot row: เลือกทำการ pivot ใน row ที่มีอัตราส่วนระหว่างค่าของ solution กับ coefficient ใน pivot column **ที่ให้ค่าเป็นบวกที่มีขนาดน้อยที่สุด** โดยไม่พิจารณาในหลักสุดท้าย
4. Update ตาราง simplex tableau ใหม่โดยใช้ pivot operation ซึ่งต้องมีการสลับตำแหน่งของตัวแปรด้วย และเริ่มทำข้อ 2 ใหม่จนกระทั่งได้ค่าในแถวของ objective function (แถวสุดท้าย) และคอลัมน์ของ solution (หลักสุดท้าย) เป็นบวกทั้งหมด ยกเว้นค่าของ objective function
5. ค่าในหลักสุดท้ายจะเป็นค่าของตัวแปรที่ทำให้เกิด maximal solution และค่าในแถวสุดท้ายของหลักสุดท้ายคือค่า cost ที่ทำให้เกิด maximal solution

Minimization problem

ปัญหาของการทำ minimization ถูกเขียนเป็นสมการโดยทั่วไปได้เป็น

"ทำการหาค่าของ y ที่ทำให้เกิดจุด minimum ใน objective function $y^T b$ ที่สอดคล้องกับ constraint: $y^T A \geq c^T$, $y \geq 0$"

ซึ่งจะเห็นได้ว่า constraint ต่างๆนั้นยังไม่เป็นสมการเชิงเส้น ซึ่งถ้าเราจะทำการเปลี่ยน constraint ให้เป็นสมการเชิงเส้น เราจะต้องเพิ่มค่าตัวแปรเข้าไปในสมการ โดยเขียนใหม่ได้เป็น

$$y^T A = c^T + s^T \text{ หรือ } s^T = y^T A - c^T$$

โดยปัญหานี้จะสามารถเขียนใหม่ได้เป็น

“ทำการหาค่าของ y และ s ที่ทำให้เกิดจุด minimum ใน objective function $y^T b$ ที่สอดคล้องกับ constraint: $s^T = y^T A - c^T$, $y \geq 0$, และ $s \geq 0$ ”

ทั้งนี้เราจะเรียก ตัวแปร s นี้ว่าเป็น slack variable จาก constraint ที่จัดให้อยู่ในรูปของสมการเชิงเส้นโดยมี slack variable อยู่ด้วยนั้น เราสามารถนำมาเขียนลงในตารางได้เป็น

$$s^T = y^T A - c^T$$

	s_1	s_2	$\cdots$	s_n	-1
y_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	b_1
y_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
y_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	b_m
1	$-c_1$	$-c_2$	$\cdots$	$-c_n$	0

จะเห็นได้ว่าหลักสุดท้ายของตารางนั้นได้มาจากการเขียน objective function $z = y^T b$ ให้เป็น $z - y^T b = 0$ แล้วนำสมการที่ได้ไปจัดเรียงในหลักสุดท้ายนั่นเอง โดยเราจะเรียกตารางนี้ว่าเป็น Simplex Tableau ของ minimization problem

หลังจากที่เราได้ Simplex Tableau ของ minimization problem แล้ว เราจะทำการหาคำตอบของ minimization problem โดยใช้ simplex method โดยใช้หลักการเลือกตัว pivot ได้ดังนี้

1. เขียนตาราง simplex tableau

	s_1	s_2	...	s_n	-1
y_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1
y_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
y_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m
	$-c_1$	$-c_2$	...	$-c_n$	0

2. <u>Pivot row</u>: ในหลัก objective function ให้เลือก row ที่ให้**ค่าเป็นลบที่มีขนาดมากที่สุด** โดยจะไม่พิจารณาในแถวสุดท้าย
3. <u>Pivot column</u>: เลือกทำการ pivot ใน column ที่มีอัตราส่วนระหว่างค่าของ solution กับ coefficient ใน pivot column **ที่ให้ค่าเป็นลบที่มีขนาดน้อยที่สุด** โดยไม่พิจารณาในหลักสุดท้าย

4. Update ตาราง simplex tableau ใหม่โดยใช้ pivot operation ซึ่งต้องมีการสลับตำแหน่งของตัวแปรด้วย และเริ่มทำข้อ 2 ใหม่จนกระทั่งได้ค่าในแถวของ objective function (แถวสุดท้าย) และคอลัมน์ของ solution (หลักสุดท้าย) เป็นบวกทั้งหมด ยกเว้นค่าของ objective function
5. ค่าในแถวล่างสุดจะเป็นค่าของตัวแปรที่ทำให้เกิด minimal solution และค่าในหลักสุดท้ายของแถวสุดท้ายคือค่า cost ที่ทำให้เกิด minimal solution

ตัวอย่างที่ 2.10 หาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันที่กำหนด โดยใช้วิธี pivot operation

Minimize the function $Z = 5x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 8x_4$

Subject to : $x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 \le 40$

$2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \le 8$

$4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \le 10$, $x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$

Solution

1. เขียน constraint ให้อยู่ในรูปของ minimize function

$$-x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 4x_4 \ge -40$$
$$-2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 \ge -8$$
$$-4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \ge -10$$

2. สร้างตาราง simplex tableau

	s_1	s_2	s_3	-1
x_1	-1	-2	-4	5
x_2	-2	1	2	-4
x_3	-2	-1	-1	6
x_4	-4	-2	1	-8
	40	8	10	0

3. ใน objective function column จะได้ค่าที่เป็นลบมากที่สุด คือ -8 ดังนั้น เราจึงได้ pivot row คือ row ที่ 4 และเราจะหา pivot column ได้จากอัตราส่วนระหว่างค่าของ solution กับ coefficient ใน pivot row ที่ให้ค่าเป็นลบที่มีขนาดน้อยที่สุด 8/-2 = -4 ดังนั้นจะได้ตำแหน่งของ pivot ที่ entry (4,2) ดังตาราง

	s_1	s_2	s_3	-1
x_1	-1	-2	-4	5
x_2	-2	1	2	-4
x_3	-2	-1	-1	6

x_4	-4	-2	1	-8
	40	8	10	0

4. สร้างตาราง second simplex tableau จาก pivot operation และเลือกค่า pivot โดยใช้หลักการเดียวกัน จะได้ตำแหน่งของ pivot ที่

	s_1	x_4	s_3	-1
x_1	3	-1	-5	13
x_2	-4	0.5	2.5	-8
x_3	0	-0.5	-1.5	10
s_2	2	-0.5	-0.5	4
	24	4	14	-32

5. สร้างตาราง third simplex tableau จาก pivot operation

	x_2	x_4	s_3	-1
x_1	0.75	-0.625	-3.125	7
s_1	-0.25	-0.125	-0.625	2
x_3	0	-0.5	-1.5	10
s_2	0.5	-0.25	0.75	0
	6	7	29	-80

6. จากตารางจะได้ค่าเป็นบวกทั้งหมด ดังนั้นจะได้คำตอบที่ค่าต่ำสุดของฟังก์ชันนี้ คือ -80 ที่จุด $x_1 = 0$, $x_2 = 6$, $x_3 = 0$ และ $x_4 = 7$

ตัวอย่างที่ 2.11 หาค่าสูงสุดของฟังก์ชันที่กำหนด โดยใช้วิธี pivot operation

Maximize the function $Z = 2x_1 + x_2$

Subject to : $2x_1 - x_2 \le 8$

$x_1 + 2x_2 \le 14$

$-x_1 + x_2 \le 4$, $x_1, x_2 \ge 0$

Solution

1. สร้างตาราง simplex tableau

	x_1	x_2	-1
s_1	2	-1	8
s_2	1	2	14
s_3	-1	1	4
	-2	-1	0

2. ใน objective function row ค่าที่เป็นลบมากที่สุด คือ -2 และหาอัตราส่วนระหว่างค่าของ solution กับ coefficient ใน pivot column ค่าเป็นบวกน้อยที่สุดคือ 8/2 = 4 ดังนั้นจะได้ตำแหน่งของ pivot ที่

	x_1	x_2	-1
s_1	2	-1	8
s_2	1	2	14
s_3	-1	1	4
	-2	-1	0

3. สร้างตาราง second simplex tableau จาก pivot operation และเลือกค่า pivot โดยใช้หลักการเดียวกัน จะได้ตำแหน่งของ pivot ที่

	s_1	x_2	-1
x_1	0.5	-0.5	4
s_2	-0.5	2.5	10
s_3	0.5	0.5	8
	1	-2	8

4. สร้างตาราง third simplex tableau จาก pivot operation

	s_1	s_2	-1
x_1	0.4	0.2	6

x_2	-0.2	0.4	4
s_3	0.6	-0.2	6
	0.6	0.8	16

5. จากตารางจะได้ค่าเป็นบวกทั้งหมด ดังนั้นจะได้คำตอบที่ให้ค่าสูงสุดของฟังก์ชันนี้ คือ 16 ที่จุด $x_1 = 6$ และ $x_2 = 4$

2.6 MATLAB Solution

ในการหาคำตอบของปัญหาที่กำหนดโดย linear programming สามารถใช้โปรแกรม MATLAB ช่วยในการหาคำตอบได้ โปรแกรมนี้มีความสามารถและฟังก์ชันในทางคณิตศาสตร์ระดับสูง และเป็นที่นิยมใช้กันอย่างแพร่หลาย สำหรับคำสั่งที่ช่วยในการหาคำตอบของสมการทางด้าน linear programming คือคำสั่ง 'linprog' โดยที่คำสั่ง 'linprog' จะใช้หาคำตอบสำหรับปัญหาที่อยู่ในรูป minimum problem โดยมีรูปแบบของการเขียน ดังนี้

$$\min_x f^T x \text{ such that } \begin{cases} A \cdot x \le b \\ Aeq \cdot x = beq \\ lb \le x \le ub \end{cases} \tag{2.3}$$

ตัวอย่างที่ 2.12 หาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันที่กำหนดให้ โดยใช้โปรแกรม MATLAB

Minimize the function $3x_1 - 2x_2 + 5x_3$, $x \ge 0$

Subject to :

$$\begin{aligned} -x_2 + 2x_3 &\ge 1 \\ x_1 \qquad + x_3 &\ge 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 &\ge 5, \ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

<u>Solution</u>

แปลง constraints ให้อยู่ในรูปแบบสมการที่ (2.3) จะได้

$$\begin{aligned} x_2 - 2x_3 &\le -1 \\ -x_1 \qquad - x_3 &\le -1 \\ -2x_1 + 3x_2 - 7x_3 &\le -5 \end{aligned}$$

<u>MATLAB Code</u>

1. ตั้งค่า parameter ต่างๆ โดยกำหนดให้

```
>>f = [3;  -2;  5];
>>A=[0 1 -2;  -1 0 -1;  -2 3 -7];
>>b=[-1;  -1;  -5];
>>lb = zeros(size(b));
```

2. หาค่า minimum จาก function ‘linprog’ โดยกำหนด initial condition เป็นศูนย์

```
>>[x,fval] = linprog(f,A,b,[ ],[ ],lb);
```

3. คำตอบของปัญหานี้

x = [0.0000; 0.6667; 1.0000]

fval = 3.6667

ดังนั้นจะได้คำตอบของ x สำหรับ minimize function เป็น $x_1 = 0, x_2 = 0.6667, x_3 = 1$ และคำตอบของฟังก์ชัน เท่ากับ 3.6667

ตัวอย่างที่ 2.13 หาค่าสูงสุดของฟังก์ชันที่กำหนดให้ โดยใช้โปรแกรม MATLAB

Maximize the function $x_1 + x_2 + 2x_3$, $x \ge 0$

Subject to : $x_2 - 2x_3 \le 3$

$-x_1 \quad +3x_3 \le 2$

$2x_1 + x_2 + x_3 \le 1$, $x_1, x_2, x_3 \ge 0$

<u>Solution</u>

เนื่องจากรูปแบบคำสั่งที่ใช้ในโปรแกรม MATLAB ใช้สำหรับปัญหาที่อยู่ในรูปของ minimum problem ดังนั้น ถ้าต้องการหาคำตอบของฟังก์ชั่นที่อยู่ในรูปของ maximum problem โดยใช้คำสั่ง ‘linprog’ ในโปรแกรม MATLAB ให้ใช้คุณสมบัติความเหมาะสม (Optimality) ทำการแปลง objective function จากหาจุด maximum ให้อยู่ในรูปของการหาจุด minimum โดยคูณ -1 กับ objective function จะได้เป็น

$$-x_1 - x_2 - 2x_3$$

<u>MATLAB Code</u>

1. ตั้งค่า parameter ต่างๆ โดยกำหนดให้

```
>> f=[-1; -1; -2];
>> A=[0 1 -2; -1 0 3; 2 1 1];
>> b=[3; 2; 1];
>> lb = zeros(size(b));
```

2. หาค่า minimum จาก function ‘linprog’ โดยกำหนด initial condition เป็นศูนย์

```
>> [x,fval] = linprog(f,A,b,[ ],[ ],lb);
```

3. คำตอบของปัญหานี้

x = [0.0000; 0.3333; 0.6667]

fval = -1.6667

ดังนั้นจะได้คำตอบของ x สำหรับ maximize function เป็น $x_1 = 0, x_2 = 0.3333, x_3 = 0.6667$ และคำตอบของฟังก์ชันเท่ากับ 1.6667 (เนื่องจากกฎของคุณสมบัติความเหมาะสม คำตอบของฟังก์ชั่นจึงต้องถูกคูณด้วย -1)