



มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี  
การสอบกลางภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2560

วิชา CPE 315, EEE 113, ENE 208 Signals and Linear Systems  
สอบ วันพฤหัสบดีที่ 7 มีนาคม 2562

วศ. ไฟฟ้าฯ ปีที่ 2  
เวลา 9.00 – 12.00 น.

คำเตือน

1. ข้อสอบวิชานี้มี 7 ข้อ รวม 84 คะแนน มี 7 หน้า (รวมใบปะหน้า และ ตารางสูตรต่าง ๆ ) แสดงวิธีทำทุกข้อ
2. เขียนคำตอบลงในสมุดคำตอบ
3. อนุญาตให้ใช้เครื่องคำนวณตามระเบียบมหาวิทยาลัยฯ
4. ไม่อนุญาตให้นำเอกสารใด ๆ เข้าห้องสอบ

เมื่อนักศึกษาทำข้อสอบเสร็จ ต้องยกมือบอกกรรมการคุมสอบ  
เพื่อขออนุญาตออกนอกห้องสอบ  
ห้ามนักศึกษานำข้อสอบและกระดาษคำตอบออกนอกห้องสอบ

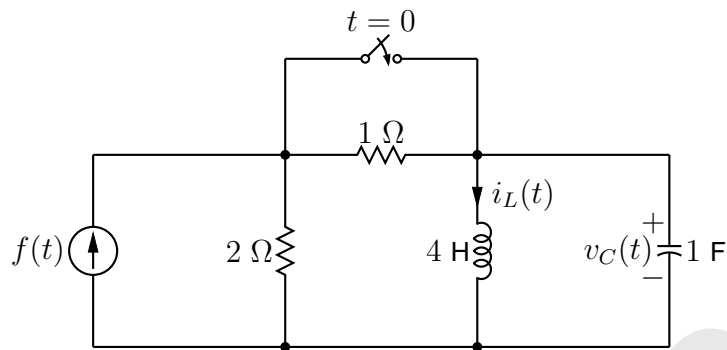
นักศึกษาซึ่งทุจริตในการสอบ อาจถูกพิจารณาโทษสูงสุดให้พ้นสภาพการเป็นนักศึกษา

ผศ. ดร. สุตชาย บุญโต  
ผู้ออกข้อสอบ โทร. 0-2470-9092

ข้อสอบนี้ได้ผ่านการประเมินจากภาควิชาวิศวกรรมระบบควบคุมและ  
เครื่องมือวัดแล้ว

(ผศ. ดร. สุตชาย บุญโต)  
หัวหน้าภาควิชาวิศวกรรมระบบควบคุม  
และเครื่องมือวัด

1. สำหรับวงจรไฟฟ้าในรูปที่ 1

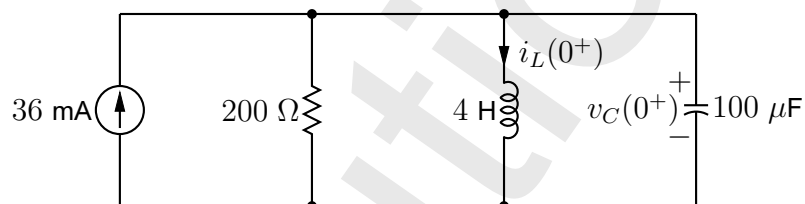


รูปที่ 1: วงจร RLC

1.1 จงหาสมการเชิงอนุพันธ์ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัญญาณออก  $v_C(t)$  และสัญญาณเข้า  $f(t)$  ที่  $t > 0$  (5 คะแนน)

วิธีทำ

วงจรที่  $t > 0$  เป็นรูปที่ 2 จาก KCL จะได้



รูปที่ 2: วงจรที่เวลา  $t > 0$

$$\frac{v_C(t)}{2} + i_L(t) + \frac{dv_C}{dt} = f(t)$$

$$i_L(t) = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^t v_C(\tau) d\tau$$

ดังนั้น

$$\frac{v_C(t)}{2} + \frac{1}{4} \int_{-\infty}^t v_C(\tau) d\tau + \frac{dv_C}{dt} = f(t)$$

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{1}{2} \frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{4} v_C(t) = \frac{df}{dt}$$

■

1.2 จงหาสมการเชิงอนุพันธ์ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัญญาณออก  $i_L(t)$  และสัญญาณเข้า  $f(t)$  ที่  $t > 0$  (5 คะแนน)

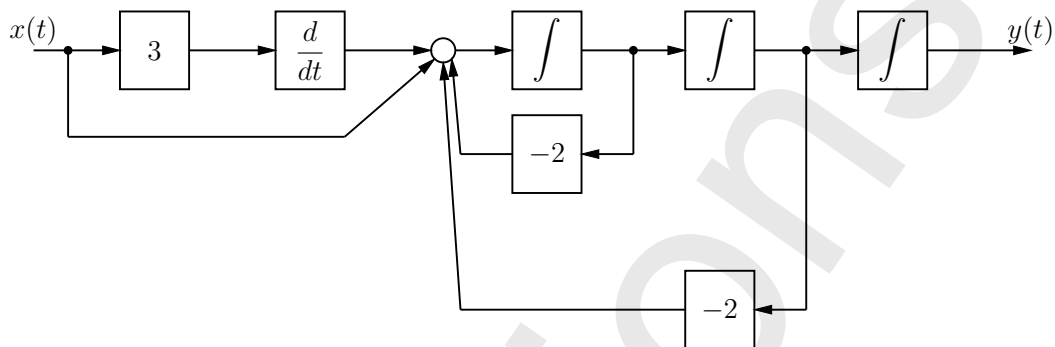
วิธีทำ

จาก KCL และ  $v_C(t) = v_L(t) = L di_L(t)/dt$  จะได้

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{2} \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{4} i_L(t) = \frac{1}{4} f(t)$$

## 2. จงตอบคำถามต่อไปนี้

2.1 จากแผนภาพกรอบ (block diagram) แสดงในรูปที่ 3 จงเขียนสมการเชิงอนุพันธ์เพื่อแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง สัญญาณออก  $y(t)$  กับสัญญาณเข้า  $x(t)$  (5 คะแนน)



รูปที่ 3: แผนภาพกรอบ

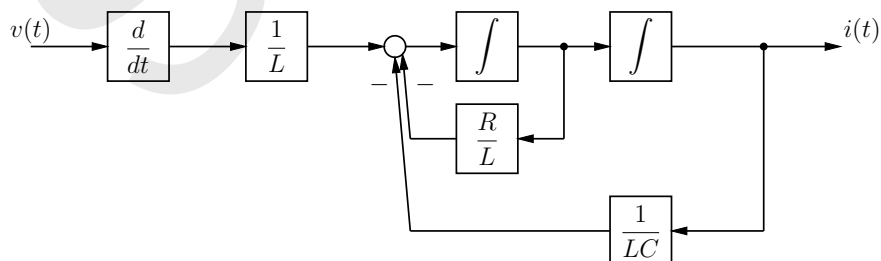
วิธีทำ

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + 2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} = 3 \frac{dx}{dt} + x$$

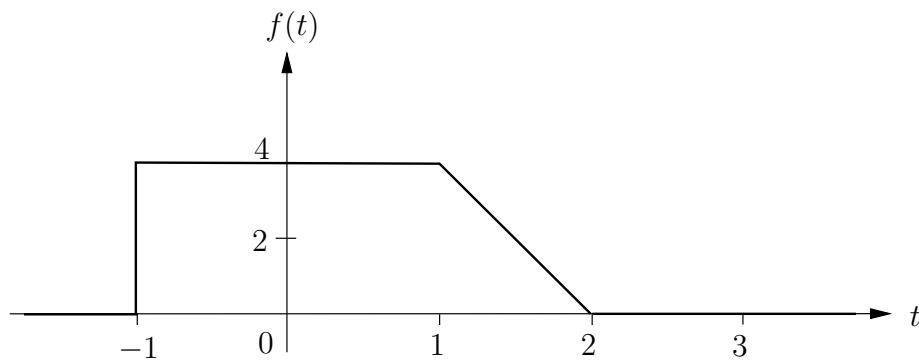
2.2 จงเขียนแผนภาพกรอบของระบบที่อธิบายด้วยสมการคณิตศาสตร์ต่อไปนี้ (5 คะแนน)

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i(t) = \frac{1}{L} \frac{dv}{dt}$$

วิธีทำ



## 3. จากสัญญาณ $f(t)$ แสดงในรูปที่ 4



รูปที่ 4: สัญญาณ  $f(t)$  สำหรับคำถามข้อที่ 3

- 3.1 จงเขียนสมการคณิตศาสตร์เพื่อใช้อธิบายสัญญาณ  $f(t)$  ในรูปของฟังก์ชันขั้นหนึ่งหน่วย (unit step)  $\mathbb{1}(t)$  (5 คะแนน)

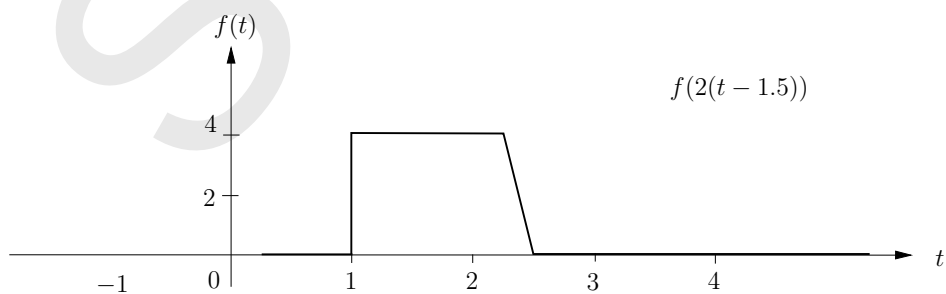
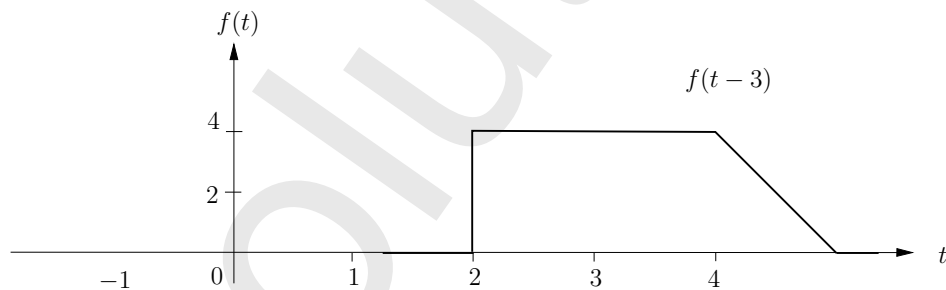
วิธีทำ

$$f(t) = 4[\mathbb{1}(t+1) - \mathbb{1}(t-1)] + (-4t+8)[\mathbb{1}(t-1) - \mathbb{1}(t-2)]$$

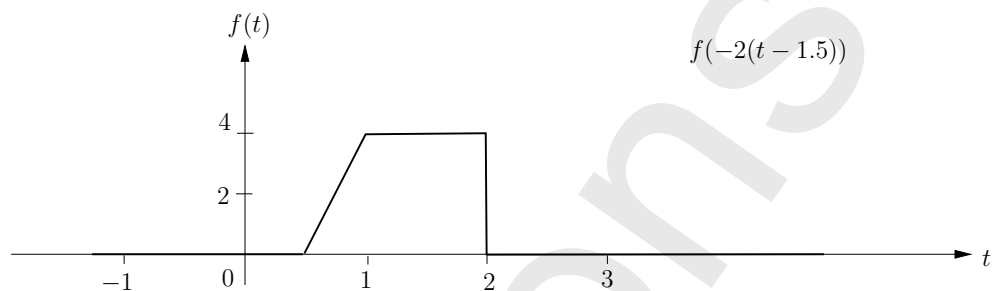
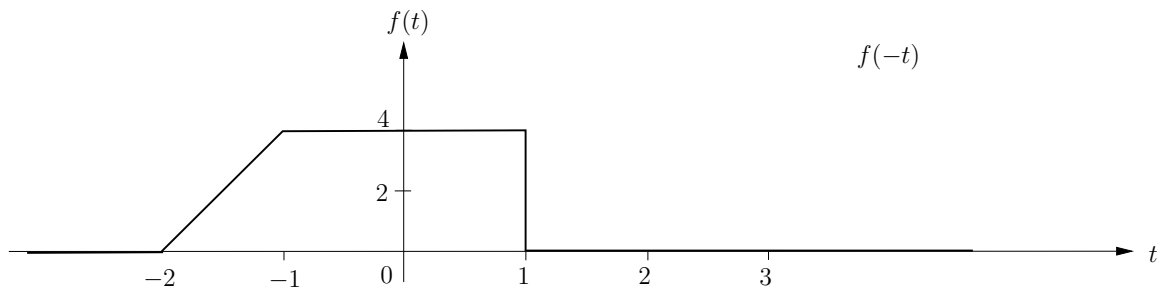
- 3.2 จากสัญญาณ  $f(t)$  ในรูปที่ 4 จงพล็อตสัญญาณ  $f_1(t) = f(2t-3)$  และ  $f_2(t) = f(3-2t)$  (8 คะแนน)

วิธีทำ

สำหรับ  $f_1(t) = f(2t-3)$  จะได้



สำหรับ  $f_2(t) = f(3 - 2t)$  จะได้



4. ระบบ LTI ต่อเนื่องทางเวลา ถูกกำหนดโดยสมการ

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 4 \frac{dy}{dt} + 4y(t) = \frac{df}{dt} + f(t)$$

ถ้า  $y(0^-) = 2$ ,  $\dot{y}(0^-) = -1$  and  $f(t) = 3e^{-4t}\mathbb{1}(t)$ , โดยที่  $\mathbb{1}(t)$  เป็นสัญญาณขั้นหนึ่งหน่วย (unit step)

4.1 จงหา zero-input response  $y_0(t)$  สำหรับเวลา  $t \geq 0$  (5 คะแนน)

วิธีทำ จากระบบ LTI จะได้ว่า

$$(D^2 + 4D + 4)y(t) = (D + 1)f(t)$$

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

$$\lambda = -2, -2$$

$$y_0(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t}$$

จากค่า  $y(0^-) = 2$  และ  $\dot{y}(0^-) = -1$  จะได้

$$2 = C_1$$

$$-1 = -2C_1 + C_2$$

$$C_2 = 3$$

และ

$$y_0(t) = 2e^{-2t} + 3te^{-2t}, \quad t \geq 0$$

#### 4.2 จงหา unit impulse response $h(t)$ (5 คะแนน)

วิธีทำ จาก

$$h(t) = b_n \delta(t) + [P(D)y_n(t)] \mathbb{1}(t),$$

$b_n = 0$  และ  $P(D) = D + 1$  ดังนั้น

$$y_n(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t}$$

$$0 = C_1$$

$$1 = -2C_1 + C_2$$

$$C_2 = 1$$

จะได้

$$y_n(t) = t e^{-2t}$$

$$h(t) = (D + 1)t e^{-2t}$$

$$= e^{-2t} - 2t e^{-2t} + t e^{-2t} = e^{-2t} - t e^{-2t}, \quad t \geq 0$$

#### 4.3 จงหา zero-state response $y_s(t)$ สำหรับเวลา $t \geq 0$ (5 คะแนน)

วิธีทำ จาก  $y_s(t) = h(t) * f(t)$  จะได้

$$y_s(t) = 3e^{-4t} \mathbb{1}(t) * (e^{-2t} - t e^{-2t}) \mathbb{1}(t)$$

จากตารางการสังวัตนาการ จะได้

$$\begin{aligned} y_s(t) &= 3 \left[ \frac{e^{-4t} - e^{-2t}}{-4 - (-2)} \right] - 3 \left[ \frac{e^{-2t} - e^{-4t} + (-4 - (-2))t e^{-2t}}{(-4 - (-2))^2} \right] \\ &= -\frac{3}{2} [e^{-4t} - e^{-2t}] + \frac{3}{4} [e^{-2t} - e^{-4t} - 2t e^{-4t}] \\ &= -\frac{9}{4} e^{-4t} + \frac{9}{4} e^{-2t} - \frac{3}{2} t e^{-2t}, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

#### 4.4 จงหา total response $y(t)$ สำหรับเวลา $t \geq 0$ (2 คะแนน)

วิธีทำ

$$\begin{aligned}y(t) &= y_0(t) + y_s(t) = 2e^{-2t} + 3te^{-2t} - \frac{9}{4}e^{-4t} + \frac{9}{4}e^{-2t} - \frac{3}{2}te^{-2t} \\&= \frac{17}{4}e^{-2t} - \frac{9}{4}e^{-4t} + 3te^{-2t} - \frac{3}{2}te^{-2t} \\&= \frac{17}{4}e^{-2t} - \frac{9}{4}e^{-4t} + \frac{3}{2}te^{-2t}\end{aligned}$$

4.5 จงหา natural response  $y_n(t)$  สำหรับเวลา  $t \geq 0$  (2 คะแนน)

วิธีทำ จาก  $y(t)$  ในข้อที่แล้วจะได้

$$y_n(t) = \frac{17}{4}e^{-2t} + \frac{3}{2}te^{-2t}, \quad t \geq 0$$

4.6 จงหา forced response  $y_\phi(t)$  สำหรับเวลา  $t \geq 0$  (2 คะแนน)

วิธีทำ จาก  $y(t)$  ในข้อที่แล้วจะได้ว่า

$$y_\phi(t) = -\frac{9}{4}e^{-4t}, \quad t \geq 0$$

5. จงเลือกวิธีการวัดขนาดของสัญญาณที่เหมาะสม (Energy หรือ Power) พร้อมทั้งคำนวณค่าที่ได้ของสัญญาณต่อไปนี้

5.1  $y(t) = 0.25e^{j3t} + 0.25e^{-j3t}$  (5 คะแนน)

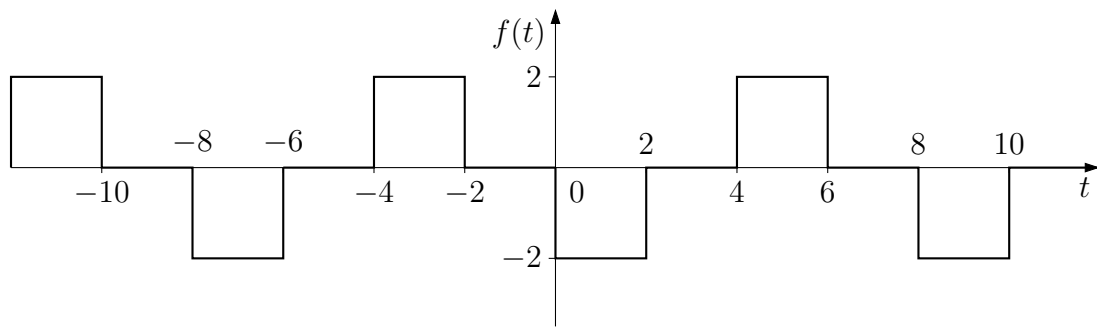
วิธีทำ เนื่องจาก

$$y(t) = 0.5 \cos(3t)$$

ดังนั้น  $y(t)$  เป็นสัญญาณกำลัง จะได้

$$P_y = \frac{0.5^2}{2} = 0.125 \text{ W}$$

5.2 สัญญาณซ้ำคาบ  $f(t)$  ดังแสดงในรูปที่ 5 (5 คะแนน)

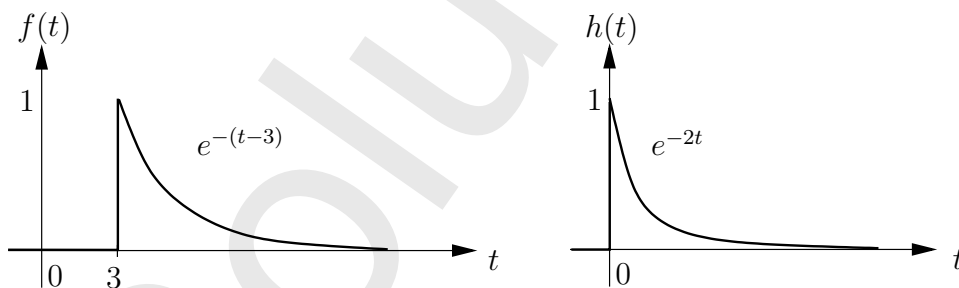


รูปที่ 5: สัญญาณ  $f(t)$

วิธีทำ เนื่องจากเป็นสัญญาณซ้ำคาบ ดังนั้นเป็นสัญญาณกำลัง จะได้

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{8} \int_0^2 (-2)^2 dt + \frac{1}{6} \int_4^6 2^2 dt \\ &= \frac{1}{8} \left[ 4t \Big|_0^2 + 4t \Big|_4^6 \right] = 2 \text{ W} \end{aligned}$$

6. จากสัญญาณ  $f(t) = e^{-(t-3)} \mathbb{1}(t-3)$  และ  $h(t) = e^{-2t} \mathbb{1}(t)$  ดังแสดงในรูปที่ 6 จงหาสังวัตนาการ (convolution)  $c(t) = f(t) * h(t)$  ด้วยวิธีใด ๆ ก็ได้ (10 คะแนน)



รูปที่ 6: สัญญาณที่ใช้สำหรับคำถามข้อ 6

วิธีทำ

$$\begin{aligned} c(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\tau-3)} \mathbb{1}(t-3) e^{-2(t-\tau)} \mathbb{1}(t-\tau) d\tau \\ &= \int_3^t e^{-(\tau-3)} e^{-2(t-\tau)} d\tau \\ &= e^{-2t+3} \int_3^t e^{\tau} d\tau = e^{-2t+3} [e^t - e^3] \\ &= e^{-(t-3)} - e^{-2(t-3)}, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

7. จงตอบคำถามต่อไปนี้

7.1 จงหาผลการแปลงลาปลาซผกผัน (inverse Laplace) ของ

$$F(s) = \frac{e^{-(s-1)} + 3}{s^2 - 2s + 5}$$

(5 คะแนน)

วิธีทำ

$$F(s) = \frac{e^{-s}e^1}{s^2 - 2s + 5} + \frac{3}{s^2 - 2s + 5} = \frac{e^1}{2} \frac{2e^{-s}}{(s-1)^2 + 2^2} + \frac{3}{2} \frac{2}{(s-1)^2 + 2^2}$$
$$f(t) = \frac{1}{2}e^1 e^{t-1} \sin(2(t-1))\mathbb{1}(t-1) + \frac{3}{2}e^t \sin(2t)\mathbb{1}(t), t \geq 0$$

■

7.2 จงหาผลการแปลงลาปลาซ (Laplace) ของ

$$f(t) = \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t) \mathbb{1}(t)$$

(5 คะแนน)

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t) = \frac{1}{2} [\cos(\omega_1 t + \omega_2 t) + \cos(\omega_1 t - \omega_2 t)]$$

then, we have

$$F(s) = \frac{1}{2} \left[ \frac{s}{s^2 + (\omega_1 + \omega_2)^2} + \frac{s}{s^2 + (\omega_1 - \omega_2)^2} \right]$$

■

## Formulas and Tables

**L, C:**

$$v_L(t) = L \frac{d}{dt} i_L(t), \quad i_C(t) = C \frac{d}{dt} v_C(t)$$

**Energy:**

$$E_f = \int_{-\infty}^{\infty} |f^2(t)| dt$$

**Power:**

$$P_f = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f^2(t)| dt$$

**Convolution:**

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

**Trigonometric Identities:**

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \sin B \cos A$$

### Convolution Table

|                                            |                                          |                                                                                                                                                                                   |
|--------------------------------------------|------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $f_1(t) = e^{\lambda t} \mathbb{1}(t)$     | $f_2(t) = \mathbb{1}(t)$                 | $f_1(t) * f_2(t) = -\frac{1}{\lambda} (1 - e^{\lambda t}) \mathbb{1}(t)$                                                                                                          |
| $f_1(t) = e^{\lambda t} \mathbb{1}(t)$     | $f_2(t) = e^{\lambda t} \mathbb{1}(t)$   | $f_1(t) * f_2(t) = t e^{\lambda t} \mathbb{1}(t)$                                                                                                                                 |
| $f_1(t) = e^{\lambda_1 t} \mathbb{1}(t)$   | $f_2(t) = e^{\lambda_2 t} \mathbb{1}(t)$ | $f_1(t) * f_2(t) = \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} \mathbb{1}(t), \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$                                                 |
| $f_1(t) = t e^{\lambda t} \mathbb{1}(t)$   | $f_2(t) = e^{\lambda t} \mathbb{1}(t)$   | $f_1(t) * f_2(t) = \frac{1}{2} t^2 e^{\lambda t} \mathbb{1}(t)$                                                                                                                   |
| $f_1(t) = t e^{\lambda_1 t} \mathbb{1}(t)$ | $f_2(t) = e^{\lambda_2 t} \mathbb{1}(t)$ | $f_1(t) * f_2(t) = \frac{e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t} + (\lambda_1 - \lambda_2) t e^{\lambda_1 t}}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} \mathbb{1}(t), \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$ |

### Continuous-Time Forced response

| Input $f(t)$                                                              | Forced Response $y_\phi(t)$                                                    |
|---------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|
| $e^{\zeta t}, \zeta \neq \lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$                  | $\beta e^{\zeta t}$                                                            |
| $e^{\zeta t}, \zeta = \lambda_i$                                          | $\beta t e^{\zeta t}$                                                          |
| $k$                                                                       | $\beta$                                                                        |
| $\cos(\omega t + \theta)$                                                 | $\beta \cos(\omega t + \phi)$                                                  |
| $(t^r + \alpha_{r-1}t^{r-1} + \dots + \alpha_1 t + \alpha_0) e^{\zeta t}$ | $(\beta_r t^r + \beta_{r-1}t^{r-1} + \dots + \beta_1 t + \beta_0) e^{\zeta t}$ |

### Laplace Transform

| $f(t)$                        | $F(s)$                                  |
|-------------------------------|-----------------------------------------|
| $f(t)$                        | $\int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$         |
| $\delta(t)$                   | 1                                       |
| $\mathbb{1}(t)$               | $\frac{1}{s}$                           |
| $t^n \mathbb{1}(t)$           | $\frac{n!}{s^{n+1}}$                    |
| $e^{\lambda t} \mathbb{1}(t)$ | $\frac{1}{s - \lambda}$                 |
| $\cos \omega t \mathbb{1}(t)$ | $\frac{s}{s^2 + \omega^2}$              |
| $\sin \omega t \mathbb{1}(t)$ | $\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$         |
| $t f(t) \mathbb{1}(t)$        | $-\frac{dF(s)}{ds}$                     |
| $e^{at} f(t) \mathbb{1}(t)$   | $F(s - a)$                              |
| $f(at) \mathbb{1}(t)$         | $\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$ |
| $f(t - T) \mathbb{1}(t - T)$  | $e^{-sT} F(s)$                          |

## Unit Impulse response

### Continuous-Time:

$$h(t) = c_n \delta(t) + [P(D)y_n(t)] \mathbb{1}(t),$$

where  $y_n^{(n-1)}(0) = 1$  and  $y_n(0) = \dot{y}_n(0) = \ddot{y}_n(0) = \dots = y_n^{(n-2)}(0) = 0$ .

### Continuous-Time Characteristic Mode

$n$  Distinct roots

$$y_0(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}$$

$n$  Repeated roots

$$y_0(t) = (c_1 + c_2 t + \dots + c_n t^{n-1}) e^{\lambda t}$$

Complex conjugate roots  $\lambda = \alpha \pm j\beta$

$$y_0(t) = c e^{\alpha t} \cos(\beta t + \theta)$$