



มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี
การสอบกลางภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2558

วิชา INC 211 Mathematics for Signals and Systems วศ. ระบบควบคุมและเครื่องมือวัด ปีที่ 2 (ปกติ, สหกิจ)
สอบ วันศุกร์ที่ 25 กันยายน 2558 เวลา 13.00 – 16.00 น.

คำเตือน

1. ข้อสอบวิชานี้มี 7 ข้อ รวม 46 คะแนน มี 4 หน้า (รวมใบปะหน้าและตารางสูตร) แสดงวิธีทำทุกข้อ
2. เขียนคำตอบลงในสมุดคำตอบ
3. อนุญาตให้ใช้เครื่องคำนวณตามระเบียบมหาวิทยาลัยฯ

เมื่อนักศึกษาทำข้อสอบเสร็จ ต้องยกมือบอกกรรมการคุมสอบ
เพื่อขออนุญาตออกนอกห้องสอบ
ห้ามนักศึกษานำข้อสอบและกระดาษคำตอบออกนอกห้องสอบ

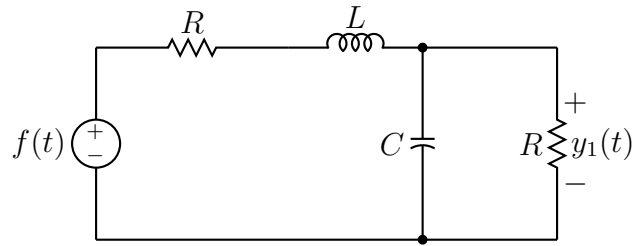
นักศึกษาซึ่งทุจริตในการสอบ อาจถูกพิจารณาโทษสูงสุดให้พ้นสภาพการเป็นนักศึกษา

(ผศ. ดร. สุธชาญ บุญโต)
ผู้ออกข้อสอบ โทร. 0-2470-9096

ข้อสอบนี้ได้ผ่านการประเมินจากภาควิชาวิศวกรรมระบบ
ควบคุมและเครื่องมือวัดแล้ว

(ผศ. ดร. ปรัชญสิทธิ์ สมานภิบุรณ์)
รักษาการแทนหัวหน้าภาควิชาวิศวกรรมระบบควบคุม
และเครื่องมือวัด

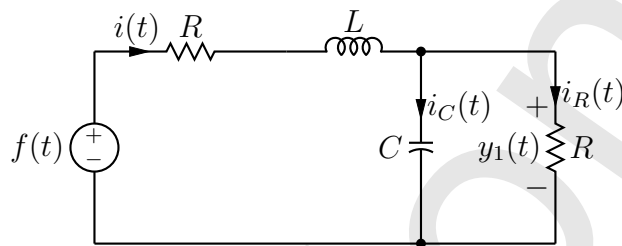
1. สำหรับวงจรไฟฟ้าแสดงดังในรูปที่ 1 จงหาสมการเชิงอนุพันธ์ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัญญาณออก $y_1(t)$ กับสัญญาณเข้า $f(t)$ (6 คะแนน)



รูปที่ 1: วงจร RLC

Solution:

We have



$$y_1(t) = v_C(t) \text{ and } i_C(t) = C \frac{dy_1}{dt}$$

Using KVL with the left hand side loop,

$$-f(t) + Ri(t) + L \frac{di}{dt} + y_1(t) = 0$$

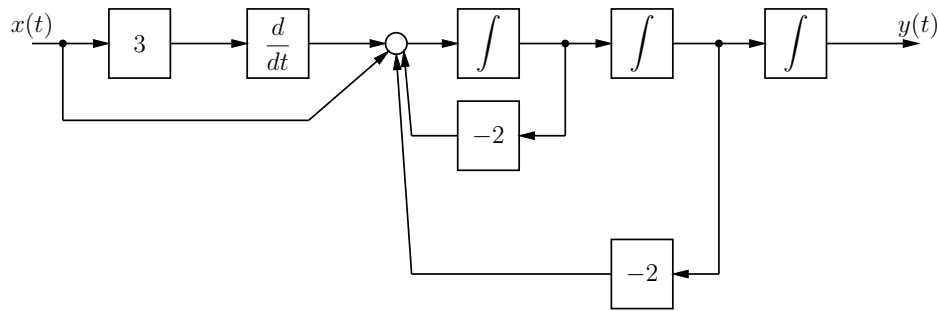
$$i(t) = i_C(t) + i_R(t) = \frac{1}{R}y_1(t) + C \frac{dy_1}{dt}$$

Then

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} + \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{RC} \right) \frac{dy_1}{dt} + \frac{2}{LC}y_1(t) = \frac{1}{LC}f(t)$$

□

2. จากแผนภาพแบบบล็อก (block diagram) แสดงในรูปที่ 2 จงเขียนสมการเชิงอนุพันธ์เพื่อแสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัญญาณออก $y(t)$ กับสัญญาณเข้า $x(t)$ (3 คะแนน)



รูปที่ 2: แผนภาพแบบบล็อก

Solution:

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + 2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} = 3 \frac{dx}{dt} + x(t)$$

□

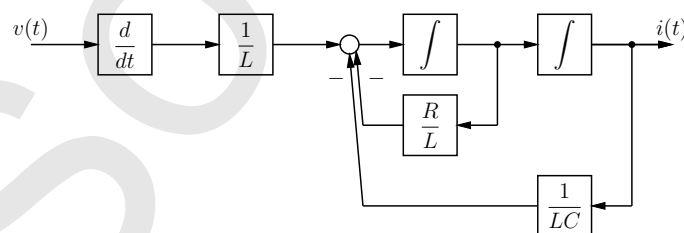
3. จงเขียนแผนภาพแบบบล็อกของระบบที่อธิบายด้วยสมการคณิตศาสตร์ต่อไปนี้ (4 คะแนน)

$$L \frac{di}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau = v(t)$$

Solution:

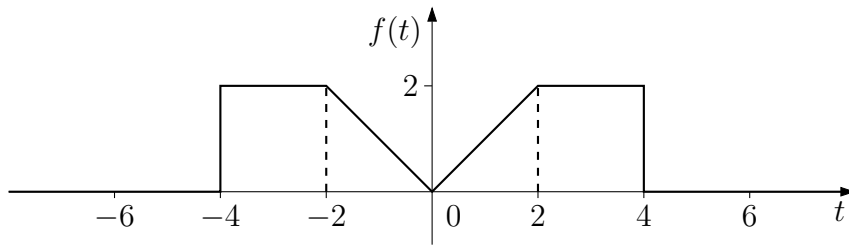
Derivative the both sides of the equation, then

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i(t) = \frac{1}{L} \frac{dv}{dt}$$



□

4. จากสัญญาณ $f(t)$ แสดงในรูปที่ 3,



รูปที่ 3: สัญญาณ $f(t)$ สำหรับคำถามข้อที่ 4

4.1 จากสัญญาณที่แสดงในรูปที่ 3 จงเขียนสมการคณิตศาสตร์เพื่อใช้อธิบายสัญญาณ $f(t)$ ในรูปของฟังก์ชันขั้นหนึ่งหน่วย (unit step) $u(t)$ (4 คะแนน)

Solution:

From the Fig. 3, we can separate the signal into 4 parts as follow:

$$f_1(t) = 2[u(t+4) - u(t+2)]$$

$$f_2(t) = -t[u(t+2) - u(t)]$$

$$f_3(t) = t[u(t) - u(t-2)]$$

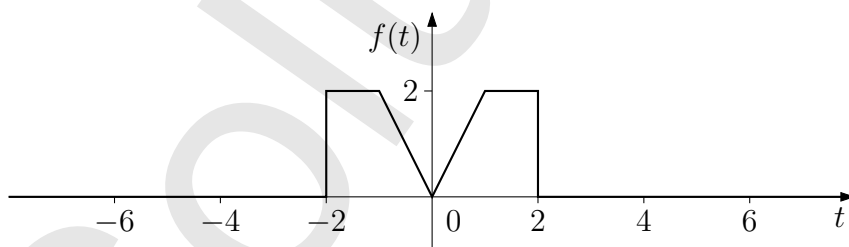
$$f_4(t) = 2[u(t-2) - u(t-4)]$$

Then $f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) + f_4(t)$. □

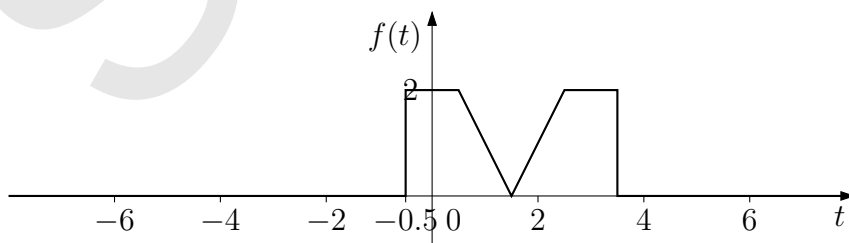
4.2 จากสัญญาณ $f(t)$ ในรูปที่ 3 จงวาดสัญญาณ $f_1(t) = f(2t-3)$ และ $f_2(t) = f(2-t)$ (4 คะแนน)

Solution:

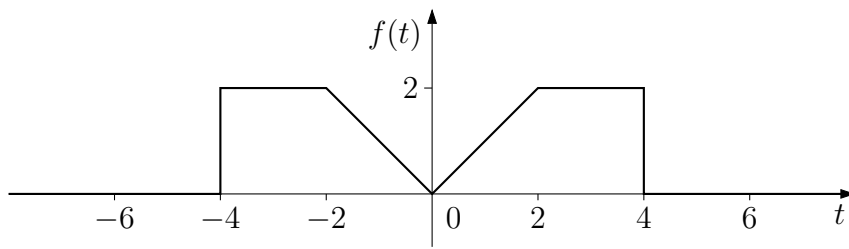
$f(2t)$



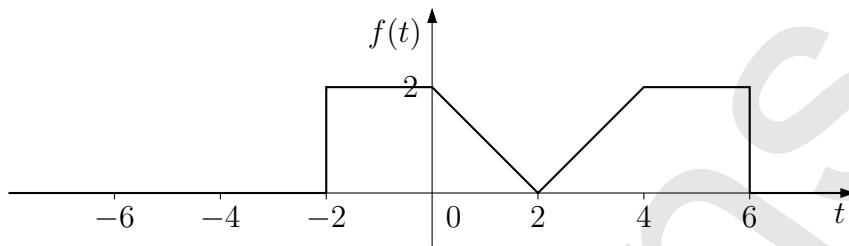
$f(2t-3)$



$$f(-t)$$



$$f(2-t)$$



□

5. จงเลือกวิธีการวัดขนาดของสัญญาณที่เหมาะสม (Energy หรือ Power) พร้อมทั้งคำนวณค่าที่ได้ของสัญญาณต่อไปนี

5.1 $y(t) = 0.25e^{j3t} + 0.25e^{-j3t}$ (3 คะแนน)

Solution:

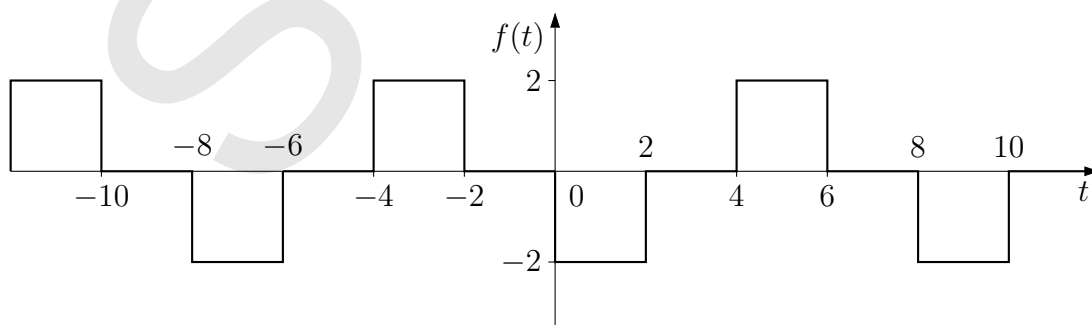
$$y(t) = 0.5 \cos(3t)$$

It is a periodic signal. We have to measure it by using power. The power of this signal is

$$P_y = \frac{(0.5^2)}{2} = 0.125.$$

□

- 5.2 สัญญาณซ้ำคาบ $f(t)$ ดังแสดงในรูปที่ 4 (3 คะแนน)



รูปที่ 4: สัญญาณ $f(t)$ สำหรับคำถามข้อที่ 5.2

Solution:

We have to use power to measure the size of the signal. Then

$$P_f = \frac{1}{8} \int_0^8 |f(t)|^2 dt = \frac{1}{8} \left(\int_0^2 4 dt + \int_4^6 4 dt \right) = \frac{16}{8} = 2$$

□

6. ระบบ LTI ถูกอธิบายโดยสมการ

$$(D^2 + 5D + 6)y(t) = (4D + 8)f(t)$$

6.1 จงหา zero-input response $y_0(t)$ สำหรับ $t \geq 0$, ถ้ากำหนดให้ค่าตั้งต้น $y_0(0^-) = 4$ และ $\dot{y}_0(0^-) = -4$ (4 คะแนน)

Solution: The characteristic equation is

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$$

$$\lambda = -2, -3$$

and the zero-input response is

$$y_0(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t}, \quad t \geq 0$$

Using the given initial conditions, we have

$$C_1 + C_2 = 4$$

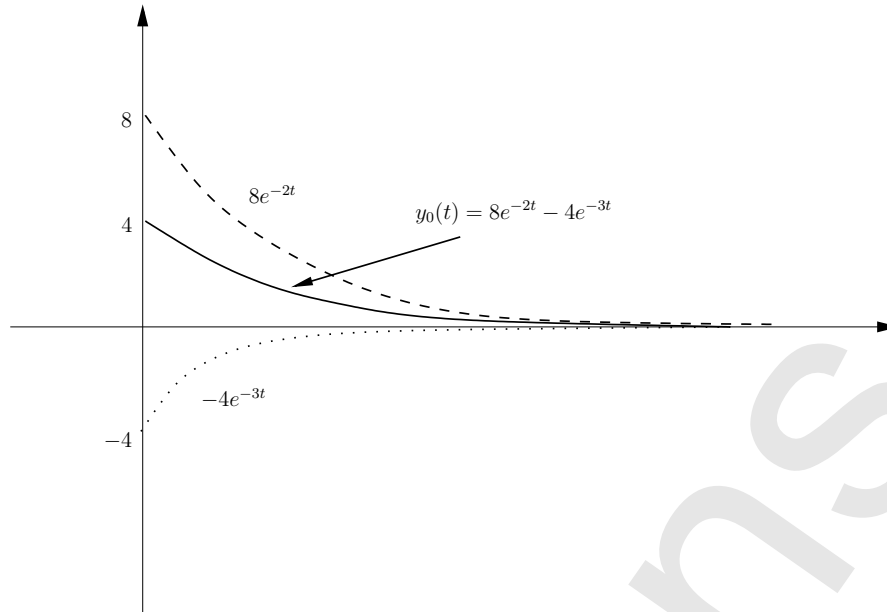
$$-2C_1 - 3C_2 = -4$$

and $C_1 = 8$ and $C_2 = -4$. Finally $y_0(t) = 8e^{-2t} - 4e^{-3t}$, $t \geq 0$.

□

6.2 วาดกราฟ $y_0(t)$ (3 คะแนน)

Solution:



□

6.3 จงหาการตอบสนองต่ออิมพัลส์ (impulse response) $h(t)$ ของระบบ (4 คะแนน)

Solution:

Since $b_n = 0$ and $P(D) = 4D + 8$, the impulse response is

$$h(t) = 0 + [(4D + 8)y_n(t)]u(t), \quad t \geq 0$$

From the previous question, we have

$$y_n(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t}, \quad \dot{y}_n(0) = 1, \quad y_n(0) = 0$$

We have $C_1 = 1$ and $C_2 = -1$ and $y_n(t) = e^{-2t} - e^{-3t}$. Finally

$$\begin{aligned} h(t) &= (4D + 8)(e^{-2t} - e^{-3t})u(t) \\ &= -8e^{-2t} + 12e^{-3t} + 8e^{-2t} - 8e^{-3t} = 4e^{-3t}. \end{aligned}$$

□

7. จงหาผลลัพธ์ของการปริพันธ์ต่อไปนี้ ถ้ากำหนดให้ $\delta(t)$ เป็นฟังก์ชันอิมพัลส์ และ $u(t)$ เป็นฟังก์ชันขั้นหนึ่งหน่วย (unit step function)

7.1 $\int_{-\infty}^6 (t-1)\delta(t-5)dt$ (1 คะแนน)

7.2 $\int_6^{\infty} (t-1)\delta(t-5)dt$ (1 คะแนน)

7.3 $\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{9t}{10} - 5\right) \delta\left(\frac{3t}{4} - \frac{5}{6}\right) dt$ (2 คะแนน)

$$7.4 \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sin \left(\frac{3\pi t}{4} \right) + e^{-2t+1} \right] \delta(-t-1) dt \quad (2 \text{ คะแนน})$$

$$7.5 \int_{-\infty}^{\infty} [u(t-6) - u(t-10)] \sin \left(\frac{3\pi t}{4} \right) \delta(t-5) dt \quad (2 \text{ คะแนน})$$

Solution:

7.1 We have $t = 5$, then the integral is $5-1 = 4$.

7.2 We have $t = 5$, which is out off the integral bound. The integral is 0.

7.3 We have

$$\begin{aligned} \frac{3t}{4} &= \frac{5}{6} \\ t &= \frac{10}{9} \end{aligned}$$

then

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{9t}{10} - 5 \right) \delta \left(\frac{3t}{4} - \frac{5}{6} \right) dt = \frac{9}{10} \frac{10}{9} - 5 = -4$$

7.4 We have $t = -1$, then the integral result is

$$\sin \left(-\frac{3\pi}{4} \right) + e^3$$

7.5 We have $t = 5$ and $u(t-6) = u(-1) = 0$, $u(t-10) = u(-5) = 0$. Then the integral result is 0.

Formulas and Tables

Capacitor:

$$i_C(t) = C \frac{dv_C}{dt}$$

Inductor:

$$v_L(t) = L \frac{di_L}{dt}$$

Energy:

$$E_f = \int_{-\infty}^{\infty} |f^2(t)| dt$$

Power:

$$P_f = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f^2(t)| dt$$

Euler's Identities

$$e^{\pm j\omega t} = \cos \omega t \pm j \sin \omega t$$
$$\cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}, \quad \sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

Unit Impulse response

Continuous-Time:

$$h(t) = b_n \delta(t) + [P(D)y_n(t)] u(t),$$

where $y_n^{(n-1)}(0) = 1$ and $y_n(0) = \dot{y}_n(0) = \ddot{y}_n(0) = \dots = y_n^{(n-2)}(0) = \dots = 0$.

Continuous-Time Characteristic Mode

n Distinct roots

$$y_0(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}$$

n Repeated roots

$$y_0(t) = (c_1 + c_2 t + \dots + c_n t^{n-1}) e^{\lambda t}$$

Complex conjugate roots $\lambda = \alpha \pm j\beta$

$$y_0(t) = C e^{\alpha t} \cos(\beta t + \theta)$$